INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos # 4

“LÁZARO CÁRDENAS”

Guía de Estudio

para preparar el Examen Extraordinario – ETS

De

GEOMETRÍA ANALÍTICA.

Basado en el Programa de Estudios de la unidad de Aprendizaje.

Para alumnos de QUINTO Semestre.

Turno Matutino

Junio 2020

UNIDAD DE APRENDIZAJE **3er SEMESTRE.**

GEOMETRÍA ANALÍTICA. Todas la Áreas.

Presentación.

la presente guía, se elaboró basado en el programa de estudios de la unidad de aprendizaje para alumnos de tercer semestre turno matutino, de acuerdo con los contenidos y enfoque de la asignatura, con el propósito de apoyar a los alumnos y profesor en el desarrollo general de la asignatura. Esta guía contempla los distintos aprendizajes que están señalados en cada una de las unidades del programa de estudio, de manera que el profesor puede aplicar las que considere pertinentes de acuerdo a las necesidades del grupo, ya que estas actividades pueden ser trabajadas en equipo por parte de los alumnos, lo que permite que el profesor revise el trabajo colectivo y les vaya indicando los errores que se van cometiendo para su corrección por parte de los alumnos, y podrían apoyarse de un software libre como GeoGebra, que ofrece al estudiante ambientes de trabajo que estimulan la reflexión y lo convierten en un ser activo y responsable de su propio aprendizaje, además provee un espacio problemático común al maestro y al estudiante para construir significados algebraicos y gráficos.

Al trabajar colectivamente, los alumnos pueden socializar de manera más libre sus conocimientos, la mayor parte de este curso se centra en el método analítico que permite representar y analizar a través del álgebra, a las curvas y los objetos geométricos que, desde el punto de vista euclidiano sólo admite formas particulares de construcción, estudio y análisis de sus elementos. El tratamiento de la temática no se centra en manejar un conjunto de fórmulas, se intenta aprender estrategias generales y diversas formas de representación que apoyan la comprensión y facilitar el trabajo, dependiendo de los elementos o condiciones que se estipulan en un problema o actividad.

PRIMER PARCIAL

➢ CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA Y LÍNEA RECTA.

❖ Sistema coordenado, lugar geométrico y distancia entre dos puntos.

1. Localiza en un plano cartesiano los siguientes puntos:

a) $(5,2); (-7,-6); (0,-3); \left(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\right); (-7,0)$.

2.En parejas, explica a un compañero la regularidad (el patrón) que caracteriza a los conjuntos de pares ordenados siguientes.

a. $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)$.
b. $(1,3), (2,5), (3,7), (4,9), (5,11)$.
c. $(1,4), (2,8), (3,12), (4,16), (5,20)$.
d. $(-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,16)$.

3. Un cuadrado tiene 10 unidades de longitud. ¿Cuáles son las coordenadas de sus vértices:

i. ¿Si uno de ellos está en el origen, dos de sus lados se encuentran a lo largo de los ejes coordenados y el otro vértice está en el segundo cuadrante?
ii. ¿Si su centro está en el origen y sus lados son paralelos a los ejes?
iii. ¿Si sus diagonales están sobre los ejes?

4. Una circunferencia cuyo radio es de 6 unidades, es tangente a los lados coordenados. Determine las coordenadas de sus centros y de sus dos puntos de tangencia. (Cuatro casos).

5) En un sistema de ejes rectangulares, ubicar los siguientes pares de puntos y calcular sus distancias respectivas. a) (3, 7) y (17, - 5) b) (0, - 9) y (9, 0).

6) Los vértices de un cuadrilátero son los puntos A (1, 3), B (7, 3), C (9, 8) y D (3, 6), demostrar que el cuadrilátero es un paralelogramo y calcular su perímetro.

7) Comprobar que los puntos A (1, 1), B (0, 5), C (-3, 0) son los vértices de un triángulo rectángulo.

8) Determina el perímetro del triángulo cuyos vértices son A (-1, -6), B (-6, 4), C (5 , 2). ¿Es un triángulo isósceles?

❖ División de un segmento en una razón dada.

1) Hallar las coordenadas del punto Q que divide al segmento cuyos extremos son: Q_1 (-2, 3), Q_2 (3, -2), en la razón $r = \frac{2}{5}$.

2) Calcular las coordenadas del punto P (x, y) que dividen al segmento A (8, -4), B (2 , 4), en la razón $r = -2$.

3) Uno de los puntos extremos de un segmento es el punto (7, 8) y su punto medio es (4, 3), hallar el otro extremo.

- **Áreas de triángulos en función de las coordenadas de sus vértices.**

1) Determinar el área y el perímetro del triángulo cuyos vértices son: A (-2, -1), B (2 , 2) y C (5 , -2).

2) Demostrar Analíticamente que los puntos cuyas coordenadas son: A (-7, 5), B (1 , 1) y C (-3 , 3), son colineales.

3) Determina las áreas de los polígonos cuyas coordenadas de los vértices son:

a) A (2, 5), B (7, 1), C (3, -4) y D (-2, 3).
b) A (-2, 5), B (5, 6), C (-4, -2), D (10, 1) y E (1, -7)

- **Ángulo de inclinación y pendiente de una recta.**

1) Determina la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos: A (-3, 2), B (7, -3).

2) Los vértices de un triángulo son los puntos A (2, -2), B (-1, 4) y C (4, 5), calcula la pendiente de cada uno de los lados.

3) ¿Cuál es el ángulo de inclinación de una recta cuya pendiente es:

a) 1? b) - 1? c) $\sqrt{3}$?

4) Una recta de pendiente 3 pasa por el punto A (3, 2), la abscisa del punto B de la recta es 4, encontrar el valor de la ordenada.

5) Tres de los vértices de un paralelogramo son A (-1, 4), B (1, -1), C (6, 1), si la ordenada del cuarto vértice es 6, ¿Cuál es su abscisa?

❖ Ángulo entre dos rectas.

1) Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos A (-2, 1), B (3, 4), y C (5, -2).

2) Demostrar que los puntos A (1, 1), B (5, 3), y C (6, -4), son vértices de un triángulo isósceles y encontrar el valor de uno de los ángulos iguales.

3) Dos rectas se cortan formando un ángulo de 135°, y sabiendo que la recta final tiene una pendiente de –3, calcular la pendiente de la recta inicial.

4) Dos rectas se cortan formando un ángulo de 45°, la recta inicial pasa por los puntos A (-2, 1) y B (9, 7) y la recta final pasa por el punto D cuya abscisa es de –2, encontrar la ordenada de D.

5) Determinar el ángulo formado por las rectas definidas por los puntos: A (2, 2), B (-5, 6) y C (3, -2), D (8, 5).

❖ Condición de paralelismo y perpendicularidad.

1) Demuestre que la recta que pasa por los puntos (-4, 3) y (6, -1) es perpendicular a la que pasa por (2, 4) y (-2, -6).

2) Demuestre que los triángulos que tienen los siguientes vértices son rectángulos.

a) (6, 7), (3, -4), (-1, 0)

3) Encuentre la pendiente de una recta perpendicular a la que pasa por los puntos (3, -2) y (-3, -1).

❖ Rectas determinadas por dos de sus puntos.

1) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (-3, -1) y B (2, -6).

2) Una recta que pasa por el punto A (7, 8) y es paralela a la recta C (-2, 2) y D (3 , -4), hallar su ecuación.

3) Demostrar que los puntos A (-5, 2), B (1, 4) y C (4, 5) son colineales, encontrar la ecuación de la recta que pasa por dos de estos puntos.

❖ Rectas determinadas por un punto y la pendiente.

1) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (1, 5) y tiene de pendiente 2.

2) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (-6, -3) y tiene un ángulo de inclinación de 45°.

3) Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es –3 y cuya intersección con el eje (y) es de –2.

- **Rectas determinadas por las dos intersecciones de los ejes de coordenadas.**

1) Hallar la ecuación de una recta, determinando los coeficientes de la forma general, si los segmentos que determina sobre los ejes $(x)\ e\ (y)$, es decir sus intersecciones son 3, -5 respectivamente.

2) Hallar la pendiente e intersecciones de la recta 7x – 9y + 2 = 0.

3) Hallar la pendiente, el ángulo y las intersecciones de la recta que pasa por el punto A (2, 3) y es perpendicular a la recta 2x – 7y + 2 = 0.

4) Una recta pasa por el punto de intersección de las rectas 2x – 3y – 5 = 0 y x + 2y – 13 = 0 y el segmento que determina sobre el eje (x) es igual al doble de su pendiente, hallar la ecuación de dicha recta.

- **Ecuación general de la recta.**

1) La ecuación de una recta es: 3x + 8y – 47 = 0, hallar la ecuación de la perpendicular en el punto B (1/3, 5).

2) La ecuación de una recta es: 3x + 8y - 47 = 0, hallar la ecuación de la paralela que pasa por el punto A (3, 2).

3) Encuentre las coordenadas en el origen y las pendientes de cada una de las siguientes rectas. Trace su gráfica. 3x – 2y – 12 = 0.

4) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y que tiene la pendiente dada: P (2, 3), m = 2.

5) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el siguiente par de puntos.
A (2, 1) y B (5, 6)

6) Encuentre la tangente del ángulo que forma la primera de las rectas siguientes con la segunda.
a) x – 3y + 7 = 0, 3x – 4y + 6 = 0

7) Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que une los puntos A (-3, 2) y B (1, 6).

❖ **Distancia de un punto a una recta.**

1) Hallar la distancia de la recta 3x – 4y + 6 = 0 al punto A (7, -3).

2) Hallar la distancia comprendida entre las rectas paralelas: 3x – 4y + 8 = 0 y 6x – 8y + 9 = 0.

✓ La ecuación de la recta como modelo matemático.

Numerosos problemas del mundo real se describen, mediante una relación lineal entre las variables que intervienen en él; es decir, su relación se expresa por medio de una ecuación de primer grado, la cual generalmente se presenta en la forma pendiente-ordenada en el origen, o sea, en la forma: $y = mx + b$.

Analicemos el ejemplo siguiente para que puedas contestar los problemas expuestos después de este.

Problema 1. Una computadora tiene 10 años de uso y su valor actual es de $23,000, pero hace cuatro años su valor era de $41,400. Si el valor de la computadora varía linealmente con el tiempo, determina:

a) La ecuación particular que expresa el valor de la computadora en términos del tiempo de uso.
b) ¿Cuál fue el valor del sistema(computadora) cuando era nuevo?
c) ¿Cuánto se deprecia el valor de la computadora por año?
d) ¿Cuál será el valor de la computadora después de 12 años de uso?
e) Si se contempla vender la computadora cuando su valor sea de $4,600, ¿cuántos años tendrá de uso?
f) ¿Después de cuantos años de uso el valor de la computadora se deprecia totalmente?

Solución: Respecto a este problema es importante puntualizar lo siguiente:

1) El valor (v) del sistema varía con el tiempo (t); por lo tanto la variable independiente es (t), en tanto que la variable dependiente es (v). Es decir nuestros pares ordenados son de la forma (t, v).
2) La relación de las variables es lineal; por consiguiente, la ecuación particular que las relaciona es de la forma $y = mx + b$, donde $y = v$ y $x = t$.

De acuerdo con lo anterior tendremos los pares ordenados $(10{,}23000)\ y\ (6{,}41400)$. Observa que hace 4 años la computadora tenía 6 años de uso y para ese tiempo su valor era de $41,600.

Con estos datos, determinamos primeramente el valor de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{23000 - 41600}{10 - 6} = \frac{-18600}{4} = -4650$$

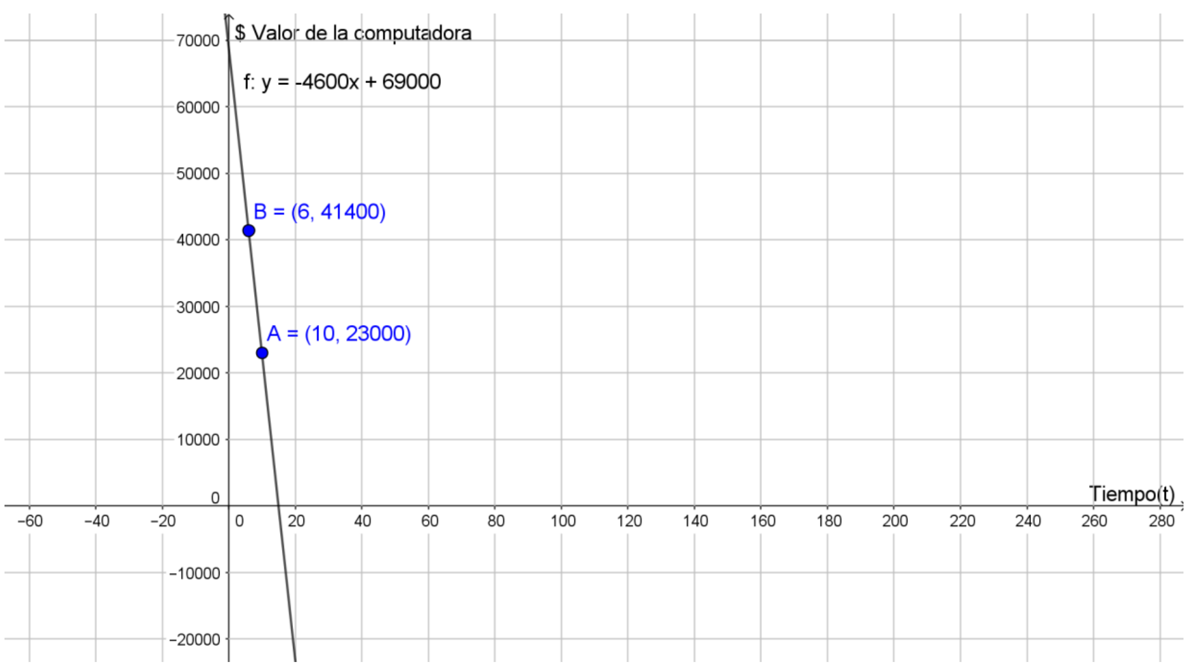
Con el valor de la pendiente y uno de los pares ordenados podemos utilizar la forma punto-pendiente, si utilizamos el par ordenado $(10{,}23000)$, tendremos que:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 23000 = -4600(x - 10)$$
$$y - 23000 = -4600x + 46000$$
$$y = -4600x + 46000 + 23000$$
$$y = -4600x + 69000$$

a) La ecuación particular que expresa el valor de la computadora en términos del tiempo de uso.

$$y = -4600x + 69000$$

La siguiente gráfica ilustra el problema



b) ¿Cuál fue el valor del sistema(computadora) cuando era nuevo?

Solución: cuando el sistema era nuevo, $t = 0$; por consiguiente, tenemos:

$$v(0) = -4600(0) + 69000$$
$$v(0) = 69{,}000, \textit{precio de la computadora cuando era nueva}.$$

c) ¿Cuánto se deprecia el valor de la computadora por año?

Solución: Como la pendiente representa la razón de cambio de la variable dependiente respecto a la independiente ($\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{Varisble\ dependiente}{Variable\ independiente}$), entonces de acuerdo con la ecuación específica, por cada año que transcurre el valor de la computadora se deprecia: $4600.

d) ¿Cuál será el valor de la computadora después de 12 años de uso?

Solución: De acuerdo con la ecuación obtenida:

$$v(12) = -4600(12) + 69000$$
$$v(12) = 13800$$

La computadora tendrá un valor de $13,800 después de 12 años de uso

e) Si se contempla vender la computadora cuando su valor sea de $4,600, ¿cuántos años tendrá de uso?

Solución: En este caso contamos con el dato $v = 4600$ y lo que debemos encontrar es para qué valor de t es $v = 4600$, tomando nuevamente la ecuación del inciso (a):

$$v = -4600t + 69000$$
$$4600 = -4600t + 69000$$
$$4600 - 69000 = -4600t$$
$$\frac{-64400}{-4600} = t$$
$$t = 14\ años.$$

f) ¿Después de cuantos años de uso el valor de la computadora se deprecia totalmente?

Solución: El valor de la computadora se deprecia cuando $v = 0$; entonces:

$$0 = -4600t + 69000$$
$$t = \frac{-69000}{-4600} = 15\ años.$$

❖ **Considerando el problema 1, resuelve los siguientes problemas de aplicación de la línea recta.**

Problema 2. El CECyT # 4 organiza un paseo a las grutas de Cacahuamilpa. Al hacer el análisis del costo, se determina que, si asisten 30 alumnos, el costo que debe cubrir cada uno debe ser de $80.00. Si van 40 alumnos entonces el costo será $75.00 por alumno. Si suponemos que la ecuación de demanda es lineal.

a. La ecuación que expresa el costo del paseo

b. ¿cuál sería el costo que debe cubrir cada persona si asisten 90 alumnos?

c) Realiza una gráfica # de alumnos vs $ costo del boleto (puedes utilizar GeoGebra).

Problema 3. **Peso de una ballena jorobada:** el peso esperado, W, en toneladas, de una ballena jorobada, se puede aproximar a partir de su longitud L, en pies, mediante la fórmula $W = 1.70L - 42.8$, para $30 \leq L \leq 50$.

a. Estime el peso de una ballena jorobada de 40 pies.
b. Si el error en la estimación de la longitud puede ser hasta de 2 pies, ¿cuál es el error correspondiente de la estimación del peso?

Problema 4. En 1990, la producción automotriz en la VW produjo 1,135,000 autos y en el año 2000 produjo 1,825,000. Suponiendo un comportamiento constante cada año.

a. ¿Cuál fue la tasa promedio de producción anual?
b. ¿Construye un modelo lineal para la producción de *"y"* vehículos cada año *"x"*?
c. ¿Cuánto autos se produjeron en 1996?

Problema 5. El valor comercial de un automóvil que tiene 8 años de uso es de $56,000. Cuando tenía 5 años de uso, su valor era de $80,000. Si dicho valor varía linealmente con el tiempo, determina:

a. La ecuación particular que expresa el valor del auto en términos del tiempo de uso.
b. El valor del automóvil cuando tenga 12 años de uso.
c. El valor del automóvil cuando era nuevo.
d. A los cuántos años de uso el automóvil ya no tendrá valor comercial.

Problema 6. Una casa que tiene 4 años de uso tiene un valor de $480,000, pero cuando era nueva su valor era de $300,000. Si el valor de la casa varía linealmente con el tiempo, calcula:

a) La ecuación que expresa el valor de la casa en términos del tiempo.
b) El valor de la casa dentro de 20 años.
c) La variación del valor de la casa por año.

SEGUNDO PARCIAL

- **SECCIONES CÓNICAS (Circunferencia, Parábola, Elipse e Hipérbola).**

El término *cónica* se deriva de la palabra *cono,* que es una figura geométrica que puede formarse a partir de una recta que se hace girar respecto a un eje, como se muestra en la figura 1.
Un cono circular recto de dos mantos es una superficie que se obtiene al girar una recta $L,$ alrededor de otra recta $E,$ manteniendo siempre el mismo ángulo entre ambas. El conjunto de dos puntos generados por la línea L se llama *cono circular recto.*
En la figura 2 se observa que el cono consta de dos partes, llamados *mantos*, que se intersecan en un punto. La recta fija E se llama eje del cono; el punto $V,$ que es donde se intersecan las dos partes (mantos) del cono, se denomina *vértice*.
Las líneas que pasan por el vértice formando el mismo ángulo que generan $E \; y \; L$ se llaman generatrices del cono. Así, cada generatriz es una línea recta que se encuentra totalmente sobre el cono.

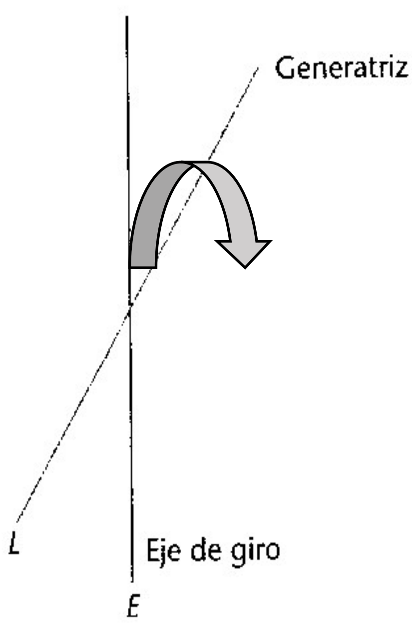


Figura 1. Al girar la recta generadora en torno al eje de giro se produce un cono.

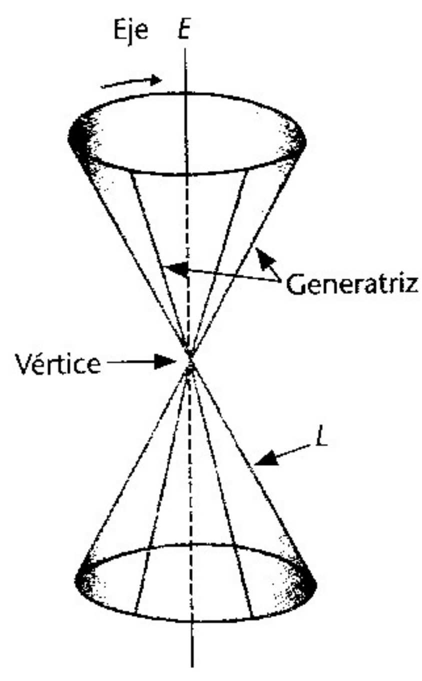


Figura 2. Cono circular recto generado al girar la generatriz.

Las secciones cónicas, o simplemente cónicas son curvas que se obtienen de la intersección de un cono circular recto con un plano, dependiendo de la inclinación del plano es como se forma una cónica como se observa en la figura 3.

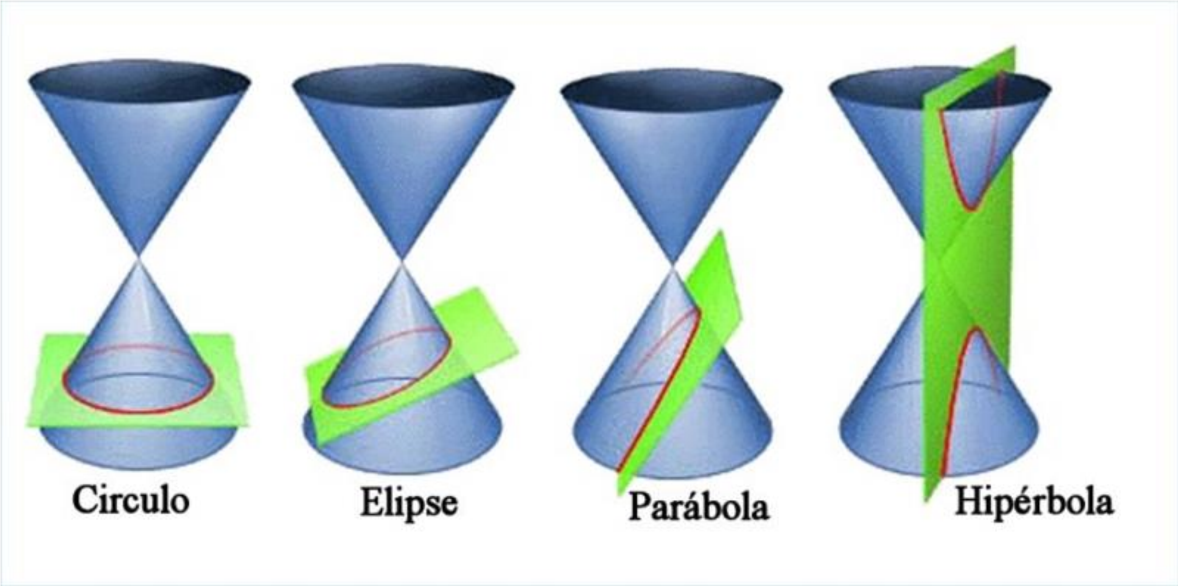


Figura 3. Secciones cónicas.

- ## Circunferencia.

❖ **Circunferencia con centro en el origen.**

1) Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio dado.

i. $r = 4,\ r = \sqrt{5},\ r = 2.25.$

2) Encuentre el centro y el radio de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 169 = 0$.

❖ **Circunferencia con centro fuera del origen.**

1) Encuentre la ecuación de la circunferencia que satisfagan las condiciones siguientes.

i. C (- 4, 3), r = 6
ii. C (- 3, 2), y que pase por el punto P (- 5, - 1)

2) Encuentre la ecuación general de la circunferencia sabiendo que uno de sus diámetros es el segmento AB: A (8, - 4) y B (- 2, 4).

3) Encuentre el centro y el radio de las siguientes circunferencias.

i. $x^2 + y^2 – 8x – 6y – 40 = 0$
ii. $9x^2 + 9y^2 + 18x – 36y – 90 = 0$

❖ **CIRCUNFERENCIA DETERMINADA POR TRES PUNTOS.**

1) Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los siguientes puntos y represéntelas gráficamente:

i. A (2, 1), B (- 4, 3), C (- 6, 5).
ii. A (5, 3), B (6, 2), C (3, -1).

❖ **INTERSECCIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA Y UNA RECTA.**

1) Encuentre la ecuación de la recta en su forma general que es tangente a la circunferencia: $(x - 3)^2 + (y - 12)^2 = 100$, en el punto P (- 5, 6).

2) Encuentre la ecuación de la recta en su forma general que es tangente a la circunferencia: $x^2 + y^2 - 10x - 2y - 3 = 0$, en el punto P (0, - 3).

3) Encuentre la ecuación de la circunferencia en su forma general de centro C (-1, -2) y sea tangente a la recta $x - 2y + 24 = 0$. Graficar.

4) Encuentre la ecuación de la circunferencia de centro C (5, - 5) y sea tangente a la recta $4x - 3y - 2 = 0$.

5) Encuentre la ecuación de la circunferencia de centro C (- 1, - 3) que sea tangente a la recta que une los puntos P_1 (- 2, 4), P_2 (2, 1).

- ## PARÁBOLA.

❖ **PARÁBOLA CON VÉRTICE EN EL ORIGEN.**

1) Encuentre las coordenadas del foco, los puntos extremos del lado recto y la ecuación de la directriz de las siguientes parábolas. Dibuje la gráfica de cada parábola.

i. $y^2 = -9x$ ii. $2x^2 = 12y$ iii. $y^2 + 16x = 0$

2) Encuentre la ecuación de las parábolas que tengan las propiedades indicadas. Dibuje cada curva.

i. Foco (0, 2), directriz: $y = -2$
ii. Puntos extremos del lado recto P_1 (2, - 1) y P_2 (- 2, - 1)
iii. Vértice en V (0, 0), eje vertical y un punto de la curva P_1 (2, 4)
iv. Vértice en V (0, 0), abre hacia abajo y su lado recto mide $L_r = 12$

PARÁBOLA CON VÉRTICE FUERA DEL ORIGEN.

1) Encuentre la ecuación ordinaria de la parábola de vértice y foco dados.
i. Vértice V (- 3, - 5); foco F (- 3, - 2)
ii. Vértice V (2, - 6); foco F (4, - 6)

2) Encuentre la ecuación ordinaria de la parábola que tenga las propiedades indicadas. Dibuje cada curva.

i. Foco F (0, - 2); directriz: $x = 5$
ii. Vértice V (3, 5/3); directriz: $y = 2$

3) Encuentre la ecuación de la parábola de eje vertical con vértice en V (- 1, - 1) y que pase por el punto P_1 (1, 6).

4) Encuentre los elementos de cada una de las siguientes parábolas y represéntelas gráficamente.

i. $y^2 - 8x - 8y + 64 = 0$
ii. $x^2 + 10x + 2y + 29 = 0$
iii. $x^2 - y + 7 = 0$

5) Encuentre la ecuación de la parábola de vértice V (2, 3), de eje de simetría paralelo al de coordenadas (y) y que pase por el punto P (4, 5).

❖ **INTERSECCIÓN DE UNA PARÁBOLA Y UNA RECTA.**

1) Encuentre en cada caso los puntos de intersección de la parábola y recta dados.

i. Parábola $x^2 + 4x - y - 5 = 0$; recta $6x - y - 2 = 0$.
ii. Parábola: $y^2 - x + 9y - 25 = 0$; recta $x - 6y - 15 = 0$-

✓ La ecuación de la parábola como modelo matemático.

Las formas parabólicas se encuentran frecuentemente en el mundo físico: antenas de televisión, puentes colgantes, antenas de satélite, arcos de puentes, micrófonos, reflectores, recolectores de calor solar, etcétera, como se puede observar en las siguientes figuras.

A continuación, se presenta un problema del mundo físico como ejemplo en donde la parábola está presente.

Problema 1. Una antena para televisión tiene forma de paraboloide. Calcula la posición del receptor que se coloca en el foco si la antena tiene un diámetro de 10 pies y 2 pies de profundidad.

Solución: La parábola que se obtiene de la antena de televisión, se muestra en la figura 1, y esta se coloca en un plano cartesiano (girando en el sentido contrario de las manecillas del reloj) colocando el vértice en el origen como se muestra en la figura 2.

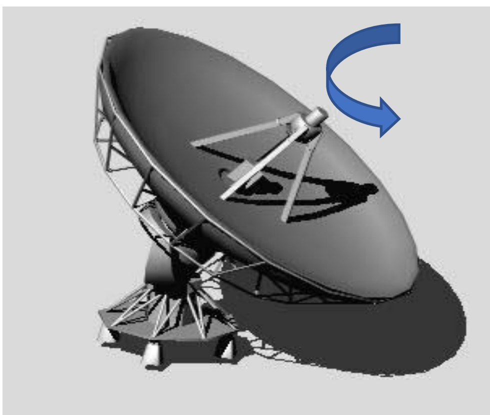


Figura 1. Antena de televisión.

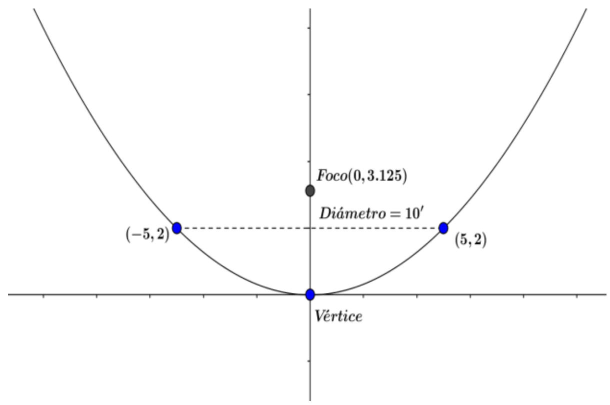


Figura 2. Plano cartesiano.

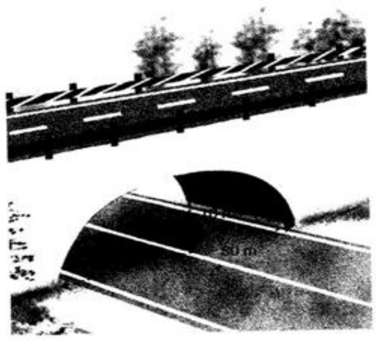
De acuerdo con la figura 2, la ecuación de la parábola es de la forma $x^2 = 4ay$. Si $x = 5,$ entonces $y = 2$ (la cual es la profundidad del plato). Así que tenemos:

$$5^2 = 4p(2)$$
$$25 = 8p, de\ donde\ p = \frac{24}{8} = 3.125$$

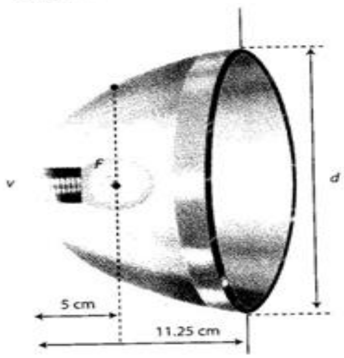
El receptor esta colocado 3.125 pies arriba del vértice a lo largo del eje de la parábola generadora.

- **Considerando el *problema 1,* resuelve los siguientes problemas de aplicación de la línea recta.**

Problema 2. Los cables de un puente colgante forman un arco parabólico. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 16 metros sobre el nivel del puente y están separados 200 metros. El punto más bajo del cable queda a 6 metros sobre la calzada del puente. Calcula la altura del cable a 80 metros del centro.



Problema 3. El arco parabólico que se forma en el puente de concreto de la figura tiene un claro de 80 metros y una altura máxima de 10 metros. Calcula la altura del arco a 8 metros del centro.



Problema 4. El faro de un automóvil tiene un reflector parabólico de 11.25 centímetros de profundidad. Si el bulbo luminoso está a 5 centímetros del vértice a lo largo del eje de simetría, determinar:

a. El diámetro del reflector.
b. El ancho que tiene el faro al nivel del bulbo luminoso.

- **ELIPSE.**

❖ Elipse con centro en el origen.

1) En la siguiente elipse determina sus elementos y representación gráfica: $3x^2 + 4y^2 = 48$

2) Encuentre la ecuación de la elipse de centro el origen que satisfaga las condiciones indicadas.
i. F ($\pm$ 5, 0), V ($\pm$ 6, 0) ii) L_r = 9, F (3, 0) iii) F (0, $\pm$ 3), excentricidad $e = \frac{3}{5}$,
iv, que pasa por el punto P (- 1, 1) con vértices V (0, $\pm$ 2).

3) Encuentre la ecuación de la elipse de centro el origen, focos sobre el eje *(x)* y que pase por los puntos $P_1\left(-3,2\sqrt{3}\right)\ y\ P_2\left(4,\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$.

❖ Elipse con centro fuera del origen.

4) Dadas las siguientes elipses, determina su ecuación ordinaria, sus elementos y representarlas gráficamente.

i. $9x^2 + 4y^2 - 90x - 24y + 225 = 0$ ii. $x^2 + 36y^2 + 4x - 432y + 1264 = 0$

5) Encuentre la ecuación de la elipse cuyo eje mayor es AB y cuyo eje menor es CD, cuyas coordenadas son: A (4, 6), B (12, 6), C (8, 3), D (8, 9).

6) Encuentre la ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones indicadas.

i. V (1, 4), V´ (- 5, 4) y excentricidad e = 1/4.
ii. V (3, - 5/2), centro C (3, - 1) y excentricidad e = 1/6.
iii. C (1, 4), F (1, 8) y excentricidad e = 1/5.
iv. F (10, 2), F´ (2, 2) y que pase por el punto P (6, 7)

7) Encuentre la ecuación de la elipse de centro C (4, - 1), uno de los focos F (1, - 1) y que pase por el punto P (8, 0).

✓ La ecuación de la elipse como modelo matemático.

Las elipses tienen diversas aplicaciones en el mundo real; entre las más importantes se encuentran las siguientes:

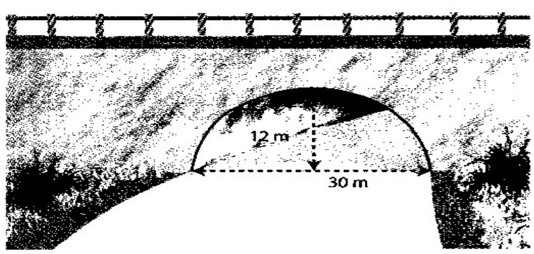
- Propiedad reflectora: entre otras, se aplica en medicina para desintegrar cálculos renales.
- En el movimiento de los planetas.
- En la ingeniería cuando un puente tiene forma de arco semielíptico.

❖ Resuelve los siguientes problemas de aplicación de la elipse.

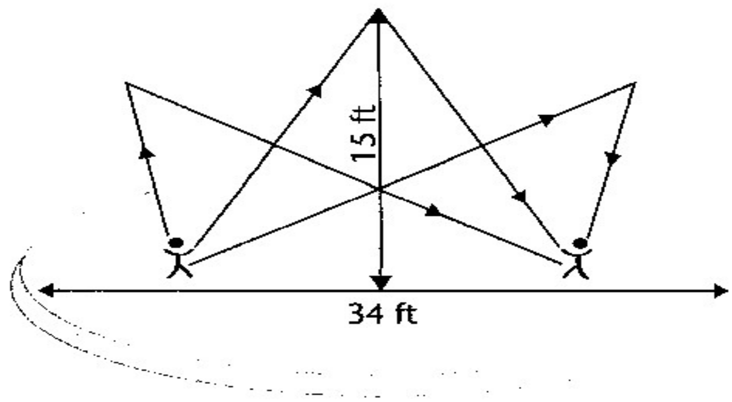
Problema 1. En la tabla siguiente se indica la excentricidad de las órbitas elípticas de los planetas ubicados alrededor del sol. ¿Cuál de ellas es más alargada? ¿Cuál de las Órbitas se acerca más a un tipo circular?

Planeta	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno	Plutón
(e)	0.2056	0.0068	0.0167	0.0934	0.0484	0.0461	0.0100	0.0100	0.2484

Problema 2. Un puente tiene forma de arco semielíptico. Si su claro es de 30 metros y su altura es de 12 metros, calcula su altura a 13 metros del centro. ***Resp. 6 m.***



Problema 3. Se desea diseñar una sala que funcione como cámara secreta de 34 pies de longitud y cuya altura del techo elíptico en el centro sea de 15 pies (como se muestra en la figura 3). ¿Dónde deben estar ubicados los focos respecto al centro de la elipse? ***Respuesta: A 8 pies del centro.***



Problema 4. Se desea construir un arco de forma semielíptica de 100 pulgadas de longitud y una altura máxima de 40 pulgadas. Para marcar su forma, un albañil usa una cuerda y dos chinchetas. Determina:

a) La longitud de la cuerda que va a utilizar. ***Respuesta 100 pulgadas.***
b) En donde debe clavar las chinchetas respecto a los extremos de la cuerda. ***Respuesta.*** **A 30 pulgadas del centro.**

TERCER PARCIAL

- **HIPÉRBOLA.**

❖ **Hipérbola con centro en el origen.**

1) En la siguiente hipérbola determina sus elementos y represéntala gráficamente: $2x^2 - 3y^2 = 12$.

2) Encuentre la ecuación de la hipérbola de centro el origen que satisfaga las condiciones indicadas.

ii. F (± 5, 0), V (± 2, 0).
iii. V (0, - 3), V (0, 3), distancia focal 7.
iv. V (± 4, 0), excentricidad e = 3.
v. F (0, ± 1/2), excentricidad e = 6/5.

3) Encuentre la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son las rectas $3y - 4x = 0$ y $3y + 4x = 0$, y uno de sus focos es F (6, 0).
4) Encuentre la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto P (2, 8) con vértices en V (0, $\pm$ 4).
5) Encuentre la ecuación de la hipérbola de centro el origen, focos sobre el eje (y) y que pase por los puntos P_1 (3, 1) y P_2 (9, 5).

❖ **Hipérbola con centro fuera del origen.**

6) Encuentre la ecuación de la hipérbola cuyo eje real es el segmento AB y cuyo eje imaginario es el segmento CD. A (4, 6), B (12, 6), C (8, 3), D (8, 9).

7) Encuentre la ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones indicadas.
   a) V (1, 4), V´ (- 5, 4) y excentricidad e = 3.
   b) V (3, 5), centro C (3, - 1) y excentricidad e = 4/3.
   c) C (1, 4), F (1, 8) y semieje imaginario 6.
   d) V (- 9, 3), C (- 5, 3) y una asíntota $x + 2y - 1 = 0$.

8) Encuentre la ecuación de la hipérbola con vértices en V (2, 7), V' (2, - 7) y que pase por el punto $P(4{,}7\sqrt{2})$.
9) Dadas las siguientes hipérbolas determina su ecuación ordinaria, sus elementos y representarlas gráficamente.

i. $-25x^2 + 4y^2 + 32y - 36 = 0$
ii. $4x^2 - 9y^2 + 8x - 54y - 113 = 0$.

➢ **COORDENADAS POLARES Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS.**

En lugar de fijar la posición de un punto en el plano cartesiano $P(x, y)$, en función de sus distancias a dos rectas perpendiculares es preferible, a veces, hacerlo en función de su distancia (r) a un punto fijo $Q(r; \theta)$ y de la dirección (θ) con respecto a una recta fija que pase por este punto. Las coordenadas de un punto, en esta referencia, se llaman *coordenadas polares,* como se muestra en la figura 1.

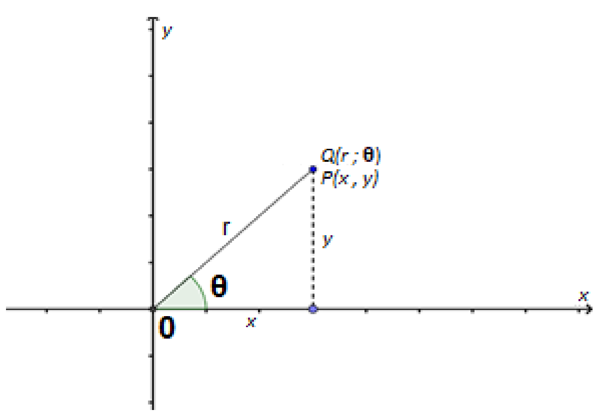


Figura 1.

$$sen\theta = \frac{y}{r} \qquad cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r * cos\theta$$
$$y = r * sen\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\pi\, rad = 180°$$

$$2\pi\, rad = 360°$$

- **Coordenadas polares.** Resuelve los ejercicios sobre coordenadas polares que se muestran a continuación.

1) Representa los siguientes puntos en el plano polar.

i) (5 , 75°) ii. (- 2, 270°)
iii) (2 , $\pi/2$) iv) (- 3 , - $5\pi/6$)
v) (6 , π / 6) vi) (7 , π)

2) Encuentre la distancia entre los pares de puntos siguientes, expresando los resultados con una cifra decimal.

ii. (5; 45°) y (8; 90°)
iii. (50; 30°) y (50; 90°)
iv. (3; 150°); (- 2; 60°)

3) Obtenga las coordenadas rectangulares de los siguientes puntos.

i. A (6, 45°)
ii. B (8, π / 6)
iii. C (- 7, 60°)

4) Obtenga las coordenadas polares de los siguientes puntos.

i) P (3, - 4) ii) Q (5, - 7) iii) R (- 8, - 3) iv) S (- 4 , 10)

5) Calcule las ecuaciones polares correspondientes a las siguientes ecuaciones cartesianas.

i) $3x + 4y + 1 = 0$ ii) $2x – 5y – 2 = 0$
iii) $x^2 + y^2 = 9$ iv) $x^2 = 8y$
v) $x^2 + y^2 – 2x + 2y = 0$ vi) $2x – 4y + 3 = 0$
vii) $y^2 – 4x + 4 = 0$

6) Calcule la ecuación rectangular de las curvas siguientes.

i. $r = \frac{3}{\cos\theta + 1}$
ii. $r = 2 * \sin\theta$
iii. $r * \sin\theta = 5$
iv. $r = \frac{1}{1+\sin\theta}$
v. $r * \cos\theta = 3$

- **Ecuaciones paramétricas.**

1) Establecer la ecuación rectangular de las siguientes Ecuaciones paramétricas.

a) $x = 2 – t$, $y = 2 + 3t$
b) $x = \sqrt{t}$, $y = 1 – t$
c) $x = t + 1$, $y = t^2$
d) $x = 2 + 3\sqrt{t + 1}$, $y = 1 - \sqrt{t}$

e) $x = 1 + 1/t$, $y = t – 1$
f) $x = \sec\theta$, $y = \cos\theta$
g) $x = \tan^2\theta$, $y = \sec^2\theta$
h) $x = 4\cos^2\theta$, $y = 2\,\text{sen}\,\theta + 3$

2) Hallar las ecuaciones paramétricas, para las siguientes ecuaciones tomando en cuenta el valor que aparece de *(x*) o de (*y*).

a) $y = 1 – x$, $x = 2t$
b) $x - 4y = 16$, $x = 4\sec\theta$
c) $x – xy = 2$, $y = 1 – t$
d) $x = t - 3$, $y + 3xy – 5 = 0$

e) $y = t + 2$, $2x + xy + 3 = 0$

UNIDADES DE LA ASIGNATURA	TIEMPO
Unidad 1. Conceptos básicos de Geometría Analítica y línea recta.	40 HORAS
Unidad 2. Cónicas (circunferencia, parábola elipse e hipérbola).	40 HORAS
Unidad 3. Coordenadas polares y Ecuaciones paramétricas.	10 HORAS

BIBLIOGRAFÍA.

- Lehmann, Charles. (1992). *Geometría Analítica.* México: Limusa.
- De Oteyza, Elena, et al. (2005). *Geometría Analítica.* México: Pearson, Prentice-Hill.
- Filloy, Eugenio y Hitt, Fernando (1997). *Geometría Analítica,* México: Iberoamérica.
- Swokowski, E y Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* (13ª ed.) México: CENGAGE Learning.
- Ortiz, Campos. F. J (2000). *Geometría Analítica.* México: Publicaciones Cultural.
- Cuéllar, C., Juan Antonio. (2003). *Geometría Analítica.* México: Mc. Graw. Hill.