GUÍA DE: CÁLCULO INTEGRAL

Índice

1. Presentación.

El *Cálculo Infinitesimal* es una de las herramientas matemáticas más importantes desarrolladas por el hombre. Es la base de muchos campos de la ciencia, entre ellos la física, y su uso tiene una gran influencia en muchas áreas de la vida moderna: científicos, ingenieros e incluso economistas lo utilizan para crear modelos que se ajusten a las situaciones de diario. Se trata de una excelente arma para el estudio de la naturaleza.

Como la mayoría de los grandes descubrimientos de la ciencia, el cálculo infinitesimal[1] no surgió de la noche a la mañana, sino que es obra de muchos matemáticos de distintas épocas. Por sus contribuciones decisivas, Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz se consideran sus padres con igualdad de derechos, pero en su época estos dos personajes sostuvieron una agria disputa por la prioridad. Esta polémica, quizá la más célebre de la historia de la ciencia, mostró lo mejor y lo peor de ambos personajes e influyó de manera determinante en la evolución posterior de las matemáticas en Europa.

En lo que a la disputa sobre la prioridad se refiere, hoy casi todos los estudios están de acuerdo en que Newton y Leibniz desarrollaron paralelamente el cálculo sin plagiarse: seguramente Newton antes que Leibniz, aunque púbico su trabajo mucho después. Polémicas al margen, lo cierto es que ambos fueron capaces de construir los sólidos cimientos del edificio que es el cálculo infinitesimal. Porque a diferencia de lo que ha ocurrido con otras teorías científicas, parece difícil que el cálculo vaya a sufrir un profundo cambio en el futuro. Si Leibniz y Newton levantaran la cabeza, estarían orgullosos de que el cálculo infinitesimal hoy en día siga siendo en esencia igual a lo que ellos mismos desarrollaron… aunque no deberían estarlo tanto de la polémica que mantuvieron y sus consecuencias (Daniel Martín Reina[2] 2007).

Consideremos aquí que, al igual que en la aritmética hay operaciones mutuamente inversas, en el cálculo pasa la mismo. La operación inversa del *Cálculo Diferencial* es el *Cálculo Integral y viceversa.* Es decir dada la diferencial, encontrar la función primitiva de la expresión diferencial dada.

[1] En 1665 Newton sentó las bases del cálculo infinitesimal en torno al novedoso concepto de *fluxión*, lo que hoy en día se conoce como derivada, la pendiente de la recta tangente a una función en un punto.

[2] Revista ¿cómo ves? Así fue Newton vs. Leibniz, páginas 26-29.

2. ANTIDERIVADA Y PRIMITIVA

1. Encuentre la Antiderivada de cada una de las siguientes funciones.

a. $f(x)= x^2 - 3x +5$ b. $f(x)= 17x^6 - 3x^4 – 43x^2 – 8$ c. $f(x)= x^{78} + 3x^{96} – 2x^{100}$

d. $f(x)= x^2 \; (x^3 – 7x^2 +3x+5)$ e. $f(x) = \dfrac{5x^7 + 4x^3}{x^2}$ f. $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x}}{x} + \dfrac{2}{x^4}$

2. Encuentra la primitiva de:

a) $f'(x) = 2x^3 + x^2 - 6x$ b) $y' = Csc^2 \dfrac{x}{2}$ c) $m = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{2}} + 10$

3. INTEGRAL INDEFINIDA

3. Resuelva las siguientes integrales.

i) $\int (x^3 + x + 2)dx$ ii) $\int \dfrac{(2x+3)dx}{x^2+3x}$ iii) $\int \dfrac{(2x+3)dx}{x+2}$ iv) $\int (x^2-4)^5 2x.dx$

v) $\int \dfrac{e^\theta d\theta}{a+be^\theta}$ vi) $\int \dfrac{(x^2+2)dx}{x+1}$ vii) $\int (x^3 \; -5).x^2dx$ viii) $\int \dfrac{2xdx}{\sqrt[3]{6-5x^2}}$

ix) $\int \dfrac{(x+4)dx}{2x+3}$ x) $\int \dfrac{1}{10x+7}dx$ xi) $\int \dfrac{2dx}{\sqrt[3]{2+2x}}$ xii) $\int \dfrac{2x+7}{x+3}dx$

xiii) $\int \left(\dfrac{\sqrt{5x}}{5} + \dfrac{5}{\sqrt{5x}} \right)^2 dx$ xiv) $\int \dfrac{t}{(3t^2+1)^4}dt$ xv) $\int \dfrac{(x^2+2)dx}{x+2}$ xvi) $\int \dfrac{dx}{2+3x}$

xvii) $\int \dfrac{(x^3+3x)dx}{x^2+1}$ xviii) $\int \dfrac{(4x+3)dx}{\sqrt[3]{1+3x+2x^2}}$ xix) $\int \dfrac{dx}{x^2+9}$ xx) $\int \dfrac{5xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

xxi) $\int \dfrac{senxdx}{1-\cos x}$ xxii) $\int x^2 \, e^{4x3} dn$ xxiii) $\int \dfrac{1}{x.\ln x}dx$ xxiv) $\int \dfrac{\cos t}{\sqrt{sent}}dt$

xxv) $\int \dfrac{(e^x + senx)dx}{\sqrt{e^x \cos x}}$ xxvi) $\int \dfrac{\sec 2\theta tg 2\theta d\theta}{3\sec 2\theta - 2}$ xxvii) $\int \dfrac{3dx}{e^x}$ xxviii) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$

xxix) $\int x^2 e^{x^3} dx$ xxx) $\int \cos(6+dx)dx$ xxxi) $\int \csc^2(9-6x)dx$ xxxii) $\int \dfrac{dx}{x^2+4x+3}$

xxxiii) $\int \dfrac{sen\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$ xxxiv) $\int \dfrac{3dx}{x^2-8x+25}$ xxxv) $\int \dfrac{sen2xdx}{3+\cos 2x}$ xxxvi) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

xxxvii) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$ xxxviii) $\int \dfrac{(x-1)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ xxxix) $\int \cos^4 xsen^3xdx$ xl) $\int sen^2\theta \cos\theta d\theta$

xli) $\int \cos^2 \theta sen\theta d\theta$ xlii) $\int sen^3 6x.\cos 6xdx$ xliii) $\int ctg^3 2x \csc 2xdx$

4. CONSTANTE DE INTEGRACION.

a. Determinar Y si $\frac{dy}{dx} = 3x^2+1$, $y=4$, $x=1$.

b. Obtenga Y si $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + 2x$, $y=5$, $x=1$.

4. Halla la ecuación de la función cuya tangente tiene una pendiente de x^3-2/x^2+2 para cada valor de x y cuya gráfica pasa por el punto (1,3).

5. Encuentra la ecuación de la función cuya gráfica tiene un mínimo relativo en $x=1$ y un máximo en $x=4$.

6. Se estima que dentro de t meses la población de un cierto pueblo estará cambiando a un ritmo de $4+5t^{2/3}$ personas por mes. Si la población actual es de 10,000 ¿Cuál será la población dentro de 8 meses?

7. Un estudio ambiental de una cierta comunidad sugiere que dentro de t años el nivel de monóxido de carbono en el aire estará cambiando un ritmo de $0.1\ t+0.1$ partes por millón por año. Si el nivel actual de monóxido de carbono en el aire es de 3.4 partes por millón, ¿Cuál será el nivel dentro de tres años?

8. El valor de reventa de una cierta maquinaria industrial decrece a un ritmo que cambia con el tiempo. Cuando la maquinaria tiene t años, el ritmo al que esta cambiando su valor es $220(t-10)$ dólares por año. Si la maquinaria se compro nueva por 12 000 dólares, ¿Cuánto valdrá 10 años después?

9. Se lanza una bola hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies/seg., y desde una altura inicial de 80 pies.

   a) Halla a la función posición que describe la altura s en función de tiempo t.
   b) ¿Cuándo llega la bola al suelo?

(Aceleración de la gravedad= –32 pies/s^2)

10. Hallar la función cuya la primera derivada sea $3x^2-2x+5$, y tenga el valor 12 cuando $x=1$.

11. Determinar la ecuación de la curva de la segunda derivada cuya tangente en cada punto tenga de pendiente $2x$.

5. INTEGRAL INDEFINIDA (Repaso).

12. Obtenga las siguientes integrales.

a) $\int \frac{4dx}{2+5x}$ b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-2x^3}}dx$ c) $\int \frac{tdt}{5t^2+4}$ d) $\int \left(\sqrt{x}-\frac{5}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

e) $\int \left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)^3 dt$ f) $\int \frac{\operatorname{sen} 4xdx}{8+\cos 4x}$ g) $\int \frac{x^3+3x}{x^2+x}dx$ h) $\int \frac{5dt}{\sqrt{e^t}}$

i) $\int \frac{5e^x+4}{e^x}dx$ j) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-3}dx$ k) $\int \frac{\sec^2 7xdx}{\sqrt{3+2\operatorname{tg}7x}}$ l) $\int \frac{3x+7}{x+2}dx$

m) $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+10}dx$ n) $\int \frac{9sen2xdx}{(3+3\cos 2x)^2}$ ñ) $\int 4\operatorname{sen}^2 t\cos tdt$ o) $\int \frac{11ds}{\cos^2 s}$

p) $\int \sec 9t\operatorname{tg}9tdt$ q) $\int tag4xdx$ r) $\int \frac{24dt}{\operatorname{sen}^2 t}$ s) $\int \cos(3-4s)ds$

t) $\int \operatorname{sen}^2 xdx$ u) $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\theta}d\theta}{\sqrt{\theta}}$ v) $\int \frac{\csc^2 3x}{\sqrt{3-ctg3x}}dx$ w) $\int \frac{-5dt}{t^2+14t+58}$

x) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ y) $\int \frac{2du}{\sqrt{15+2u-u^2}}$ z) $\int \frac{4dx}{\sqrt{9-x^2}}$ ab) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

ac) $\int \frac{ds}{\sqrt{81-36s^2}}$ ad) $\int \frac{dt}{4t^2+4t+5}$ ae) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ af) $\int \frac{13dx}{\sqrt{x(1-\sqrt{x})^2}}$

ag) $\int \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-4x}}dx$ ah) $\int \sqrt{x}\left(8+\frac{1}{x}+4x\right)dx$ ai) $\int x^5\sqrt{x^2+4}\,dx$ aj) $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

ak) $\int 3\cos^2 5xdx$ al) $\int x\sqrt[3]{x+4}\,dx$ am) $\int 8\cos^3 xdx$ an) $\int 11\operatorname{sen}^3 2xdx$

6. TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

A. Calcular las siguientes integrales utilizando el **Método de Integración por partes.**

a. $\int \ell nxdx$ b. $\int xsen\frac{x}{2}dx$ c. $\int x\sec^2 xdx$ d. $\int x^2\ell nxdx$ e. $\int arcctgxdx$ f. $\int arc\sec\theta d\theta$

. $\int arc\csc\frac{t}{2}dt$ h. $\int x\operatorname{arctg}xdx$ i. $\int x^2e^{-x}dx$ j. $\int e^{\theta}\cos\theta d\theta$ k. $\int x\cos^2 xdx$ l. $\int xe^{11x}dx$

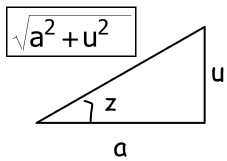
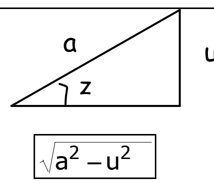
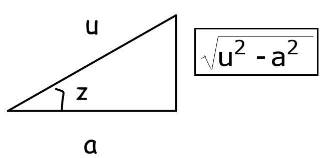
m. $\int 3xsen4xdx$ n. $\int 11x\cos\frac{x}{3}dx$ ñ. $\int \ell n4xdx$ o. $\int \sqrt[3]{x}\ell n9xdx$ p. $\int 7x^4\sqrt{x-13}dx$

q. $\int 5x^2e^{21x}dx$ r. $\int \frac{2}{3}x^2sen\frac{4x}{5}dx$ s. $\int \sec^3 12xdx$ t. $\int arctg5xdx$ u. $\int 4e^{2x}\cos 9xdx$

v. $\int 2\sec^3 4xdx$ w. $\int 4arcsen\frac{9}{5}xdx$ x. $\int x^2\cos\frac{12x}{7}dx$ y. $\int \csc^3 xdx$ z. $\int x^3e^{2x/3}dx$

ab. $\int \frac{\ell n x dx}{(x+1)^2}$ ac. $\int \frac{\ell n(x+1)dx}{\sqrt{x+1}}$ ad. $\int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2}$ ae. $\int e^{-t} \cos \pi t dt$

B. Calcular las siguientes integrales utilizando el **Método de Integración por Sustitución Trigonométrica,** de expresiones que contienen radicales de la forma: $\sqrt{a^2+u^2}$, $\sqrt{a^2-u^2}$, $\sqrt{u^2-a^2}$.

Tipo de raíz	función	Triangulo rectángulo	Función auxiliar	Identidad trigonométrica
$\sqrt{a^2+u^2}$	$\tan z = \frac{u}{a}$		$\sec z = \frac{\text{hip.}}{\text{cat .ady ac.}}$	$\sec^2 A = 1+\tan^2 A$
$\sqrt{a^2-u^2}$	$\text{sen}\, z = \frac{u}{a}$		$\cos z = \frac{\text{cat. ady ac.}}{\text{hip.}}$	$sen^2 A + \cos^2 A = 1$
$\sqrt{u^2-a^2}$	$\sec z = \frac{u}{a}$		$\tan z = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady ac.}}$	$\sec^2 A = 1+\tan^2 A$
En los dibujos de los triángulos la raíz que está encerrada en el cuadro se calcula con el teorema de Pitágoras.				

a. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ b. $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$ c. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{64+x^2}}$ d. $\int \frac{dx}{\sqrt{49-x^2}}$ e. $\int \frac{11dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

f. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx$ g. $\int \frac{33dx}{\sqrt{9+x^2}}$ h. $\int \frac{\sqrt{x^2-81}}{x}dx$ i. $\int \sqrt{121-x^2}\,dx$ j. $\int \frac{23dx}{(9-x^2)^{3/2}}$

k. $\int \frac{7dx}{\sqrt{x^2+3}}$ l. $\int \frac{14dx}{x^2\sqrt{x^2+7}}$ m. $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$ n. $\int \frac{\sqrt{36-x^2}}{2x^2}dx$ ñ. $\int \frac{21dx}{\sqrt{x^2-11}}$

o. $\int \frac{3dx}{x^2\sqrt{16+x^2}}$ p. $\int \frac{x-1}{\sqrt{25-x^2}}dx$ q. $\int \frac{\sqrt{36+x^2}}{x}dx$ r. $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$ s. $\int x^3\sqrt{7+x^2}\,dx$

C. Calcular las siguientes integrales utilizando el **Método de Integración por Descomposición en Fracciones Parciales simples.**

a. $\int \frac{3x-1}{x^2+4x-5}dx$ b. $\int \frac{17dx}{x^2+3x-4}$ c. $\int \frac{1-2x}{x^2+7x+10}dx$ d. $\int \frac{-2dx}{x^2+6x+5}$

e. $\int \frac{x^2+8x-1}{x^3-x}dx$ f. $\int \frac{3x-2}{(x+2)(x+1)(x-1)}dx$ g. $\int \frac{x^3+7}{x^3-9x}dx$ h. $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-6x}dx$

i. $\int \frac{x-7}{6x^2+x-1}dx$ j. $\int \frac{4xdx}{5x^2-18x+9}$ k. $\int \frac{x+5}{(x-1)^2(x+2)}dx$ l. $\int \frac{dx}{x^3+6x^2+9x}$

m. $\int \frac{8-x}{x^3-4x^2}dx$ n. $\int \frac{x-3}{x^3+x^2}dx$ ñ. $\int \frac{(2x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$ o. $\int \frac{4dx}{x^3+4x}$

p. $\int \frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}dx$.

7. INTEGRAL DEFINIDA

13. Obtén las siguientes integrales definidas

a) $\int_{-1}^{1}(2x^2-x^3)dx$ b) $\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$ c) $\int_{1}^{4}\left(\frac{dx}{\sqrt{x}}\right)$ d) $\int_{-2}^{3} e^{-\frac{x}{2}}dx$

e) $\int_{-6}^{-10}\frac{dx}{x+2}$ f) $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} senxdx$ g) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}$ h) $\int_{-5}^{-3}\sqrt{x^2-2}\,dx$

i) $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2-9}$ j) $\int_{0}^{3}(3-2x+x^2)\,dx$ k) $\int_{1}^{4}(1-x)\sqrt{x}\,dx$ l) $\int_{1}^{8}\sqrt{1+3x}\,dx$

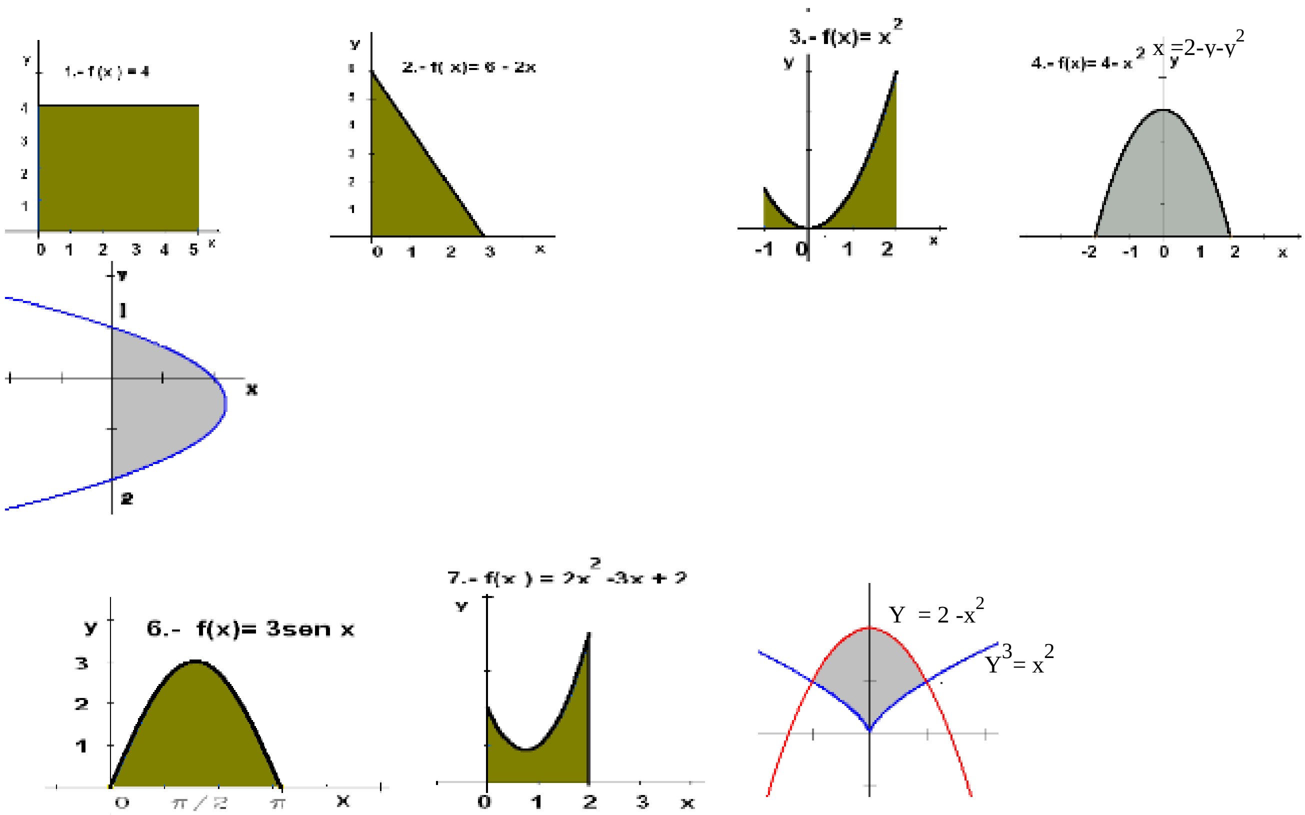
m) $\int_{0}^{2}(2-x)^2dx$ n) $\int_{0}^{1}x(1-\sqrt{x})^2\,dx$ ñ) $\int_{0}^{3}\left(\frac{dx}{\sqrt{1+x}}\right)dx$ o) $\int_{0}^{2}x^2(x^3+1)dx$

8. ÁREAS DE SUPERFICIES LIMITADAS POR CURVAS PLANAS Y VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

1. Encuentre el área de la región R bajo la curva $y = x^4 - 2x^3 + 2$ entre $x = -1$ y $x = 2$
2. Determinar el área bajo la curva $y = f(x) = x^2$ entre $x = 2$ y $x = 3$
3. Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2 - 3x$ y la recta $y = x$
4. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$
5. Hallar el área entre la parábola $y = x^2 - 6x + 5$ y la línea $y = x - 5$
6. Encuentre el área de la región acotada entre las gráficas de $y + x^2 = 6$ y $y + 2x - 3 = 0$
7. Hallar el área de la región limitada *por el eje* x, la curva $y = 6x - x^2$ y las líneas verticales $x = 1$ y $x = 4$
8. encuentre el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $2y^2 = x + 4$ y $x = y^2$
9. Sea $f(x) = x^2 + 1$ Calcule el volumen del sólido generado al girar la región bajo la gráfica de f entre -1 y 1 alrededor del eje x.
10. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por la curva $y = x^3$ el eje de las y y la recta $y = 3$ en torno del eje de las y
11. encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por las parábolas $y = x^2$ y $y^2 = 8x$ alrededor del eje de las x
12. determinar el volumen del sólido que se forma al hacer girar alrededor del eje x la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 2 - x^2$
13. Hallar el volumen que se forma al hacer girar alrededor del eje y el área limitada por la curva $y = x^2$, el eje y y la recta $y = 4$
14. La región acotada por las gráficas $x^2 = y - 2$, $2y - x - 2 = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ gira alrededor del eje x . Calcule el volumen del sólido resultante.
15. La región contenida en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \frac{1}{8}x^3$ y $y = 2x$ gira alrededor del eje y .Calcule el volumen del sólido resultante.

8.1 ÁREA

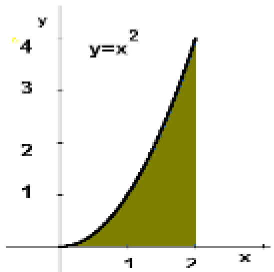
1. Escriba la integral definida que conduzca a obtener el área de la región dada. (Calcule el área).



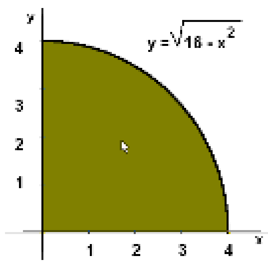
2. Encuentre el área de la región encerrada entre la curva $y = x^2 + 3$ y $x = -1$ y $x = 2$ y el eje x
3. Determinar el área bajo la curva $y = -x^2 + 3$ entre $x = -1$ y $x = 1$ y el eje x.
4. Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2 - 3x$ y la recta $y = x$
5. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$
6. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$, $x = 2$.
7. Obtenga el área encerrada entre $y = -x^2 + 2x + 3$ y el eje x.

8.2 VOLUMEN

1. Calcule el volumen del sólido que se forma al girar la región dada alrededor del a) eje x b) el eje y.



2. Calcule el volumen del sólido que se forma al girar la región dada alrededor del eje y.



3. Encontrar el volumen generado por la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$, gira alrededor del eje x.

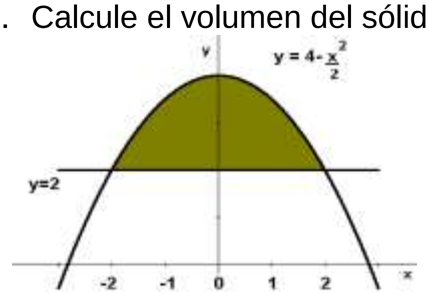
4. Hallar el volumen del sólido formado al girar alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de $\mathbf{f(x)} = \sqrt{\mathbf{sen\,x}}$ y el eje x($0 \le x \le \frac{\pi}{2}$).

5. Suponga que el circulo $x^2 + y^2 = 1$ gira al rededor del eje y. Calcule el volumen del sólido resultante.

6. Sea R la región limitada por $y = 4 - x^2$ y $y=0$. Calcule el volumen de los sólidos obtenidos cuando R gira alrededor de : a)el eje y b) la recta $y = -3$ c) la recta $y = 7$
7. Calcule el volumen del sólido que se forma al hacer girar la región limitada por $y = 3 - x$, el eje x y el eje y. Cuando la región gira alrededor de la recta dada.

   a) eje y b) eje x c) y=3

8. Calcule el volumen del sólido que se forma al girar la región dada alrededor del eje x.



9. Obtenga el volumen que se forma al girar la región encerrada entre las curvas $y = x^2$, $y = 4x - x^2$ alrededor del eje y.

10. Obtenga el volumen que se forma al girar la región encerrada entre las curvas y= 4x+1, y=x^2, gira alrededor del eje x.

9. CALCULO DE VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN Y DE AREA ENTRE CURVAS

1. Encuentre el volumen generado por la región encerrada por las curvas y= $2x^2$, y=0, x=2 cundo gira alrededor del a) eje x b) eje y c) recta y=8.

Resp. c) v=187.65u^3.

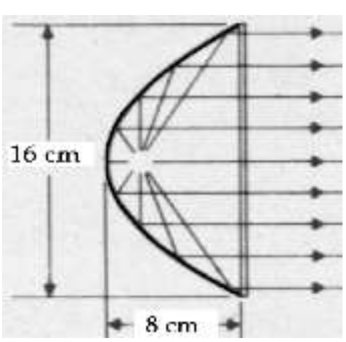
2. Hallar el área entre la parábola $y = x^2$ y la línea $y = 2x + 3$.
3. Encuentre el área de la región acotada entre las gráficas de y =x^2- 4x+3 y y = - x^2 +2x+3.
4. Hallar el área de la región limitada entre las gráficas de las curvas $y = x^2 - 2x$, $y = x$.
5. Obtenga el volumen del sólido de revolución que se forma al hacer girar la región encerrada entre las rectas y=5, y = 6-2x, eje “x”, eje “y” a) alrededor del eje “y”, b) alrededor del eje “x”.

6. El faro**:** Calcule la cantidad de espacio que hay en el interior de un faro cuyo diámetro es de 16cm. y cuya profundidad es de 8cm. Resp. 256π cm^3

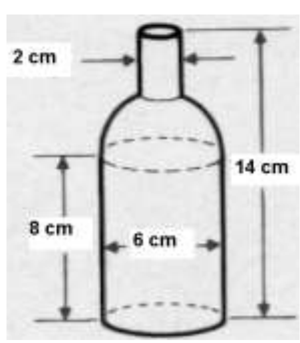
7. El Perfume: Cierta botella de perfume tiene forma de un cilindro circular sobre el cual va un segmento esférico, sobre este a su vez va un cilindro más pequeño, como se muestra en la figura. Determine el volumen de la botella. Resp. $(117+16\sqrt{2})\ \pi/12$ cm^3

8. El problema del yoyo: Se talla un yoyo de una esfera de madera recortando los polos y haciendo un canal alrededor del ecuador como se muestra en el diagrama. Determine el volumen del yoyo, suponiendo que el radio de la esfera original es de 1dm.

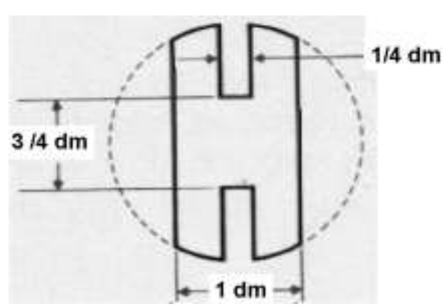
Resp. $\frac{540\pi}{1536} dm^3$



Esquema: Problema 6



Esquema: Problema 7



Esquema: Problema 8

10. LONGITUD DE ARCO

1. Calcular la longitud de arco de la curva:

a) $x= t^3$, $y= t^2$; $0 \leq t \leq 1$ *b)* $x= \cos^3 t$, $y= \operatorname{sen}^3 t$; $0 \leq t \leq 2\pi$ *c)* $x= 5\cos t$, $y= 5\operatorname{sen} t$; $0 \leq t$

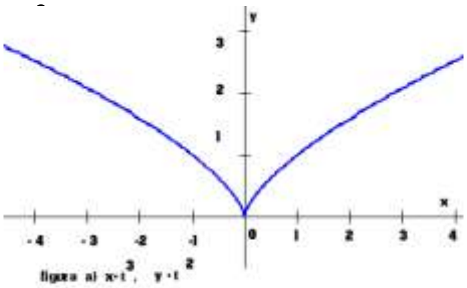


Figura a) -2 < t < 2

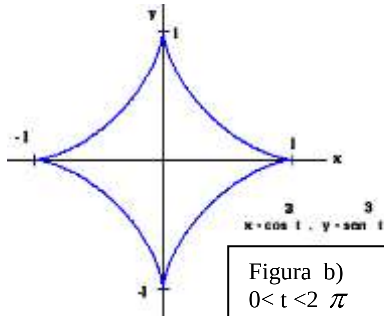


Figura b) 0< t <2 π

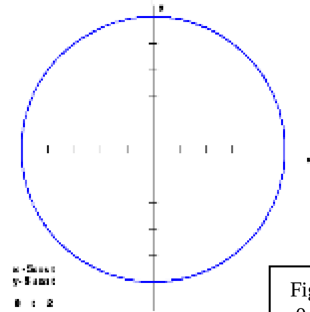
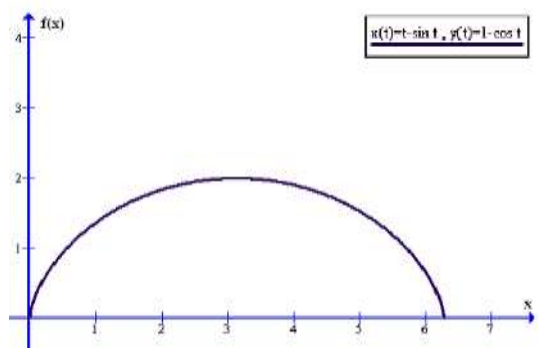


Figura c) 0< t <2 π

2. Encuentre la longitud de arco de la cicloide que tiene ecuaciones paramétricas $x=t - \operatorname{sen} t$, $y= 1-\cos t$, $0\leq t \leq 2\pi$.



11. TRABAJO

1. Un resorte cuya longitud natural es de 24 pulgadas ejerce una fuerza de 5 libras cuando se estira 10 pulgadas con respecto a su longitud natural.

a) Encuentre la constante del resorte k.

Resp. k=0.5

b) ¿Cuánto trabajo se necesita para estirar el resorte de su longitud natural a 42 pulgadas de longitud?

Resp. W=81lb/pie^2.

2. Para estirar un pequeño resorte de su longitud natural de 6cm. A una de 8cm. Se necesita una fuerza de 9 dinas. Calcule el trabajo realizado al estirar el resorte (a) de su longitud natural a una de 10cm. (b) de una longitud de 7cm. A una de 9cm.

Resp. 36ergios, 18ergios.

3. Un tanque de agua cilíndrico de 10 pies de radio y 30 pies de altura se llena hasta la mitad con agua. ¿Cuánto trabajo se necesita para bombear toda el agua sobre el borde superior del tanque? Densidad del agua = 62.4lb/pie^3.

Resp. W= 2 106 000 π pies-lb

12. LEYES DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

1. El número de bacterias en un cultivo aumenta de 600 a 1800 en 2hrs.Encontrar una fórmula para el número de bacterias al tiempo t, suponiendo que en cada momento la tasa de crecimiento es directamente proporcional al número de bacterias.

¿Cuál será el número de bacterias al cabo de cuatro horas? $\frac{dN}{dt} = \mathrm{k\ N}$ Resp. 5400

2. La ley de Newton del enfriamiento afirma que la rapidez con que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas entre el objeto y el medio que lo rodea. La temperatura de un objeto baja de 125 ºF a 100ºF en media hora, estando rodeado por el aire a una temperatura de 75ºF. Calcule su temperatura al cabo de otra media hora.

$$\frac{dT}{dt} = \mathrm{k\ (T - Tm)}$$

3. Un cuerpo, cuya temperatura es de 200º F, se enfría en el aire, que tiene una temperatura de 60ºF, hasta una temperatura 120ºF en 30min. Calcular el tiempo en el que alcanza una temperatura de 90ºF. Resp.54.54min.

$$\frac{dT}{dt} = \mathrm{k\ (T - Tm)}$$

4. Una placa de metal se enfría de 80ºC a 65ºC en 20min. Al estar rodeada de aire a una temperatura de 15ºC. Utilice la ley de enfriamiento de Newton para estimar la temperatura al cabo de una hora de enfriamiento. ¿Cuándo llegara la temperatura a 40ºC?

$$\frac{dT}{dt} = \mathrm{k\ (T - Tm)}$$

13. INTEGRALES DOBLES

1. Calcula el valor de las siguientes integrales

$a)\ \int_{-1}^{2}\int_{1}^{3} (x+5)dydx$ $\qquad b)\ \int_{2}^{3}\int_{0}^{5x} dydx$ $\qquad c)\ \int_{0}^{-1}\int_{y+1}^{2y} xydxdy = \frac{11}{24}$

$d)\ \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{a\cos\theta} \rho\ sen\theta\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{3}a^2$

14. BIBLIOGRAFÍA.

Bibliografía Básica.

Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: *Cálculo Integral.* México. 2008.

Purcell, E. J. et al. (2003). *Cálculo Diferencial e Integral.* México. PEARSON. Prentice-Hall.

Lehmann, Ch. (2008). *Cálculo Diferencial e Integral.* México. Limusa, Grupo Noriega Editores

Leithold, Louis. (2004). *Cálculo.* Ed. Oxford.

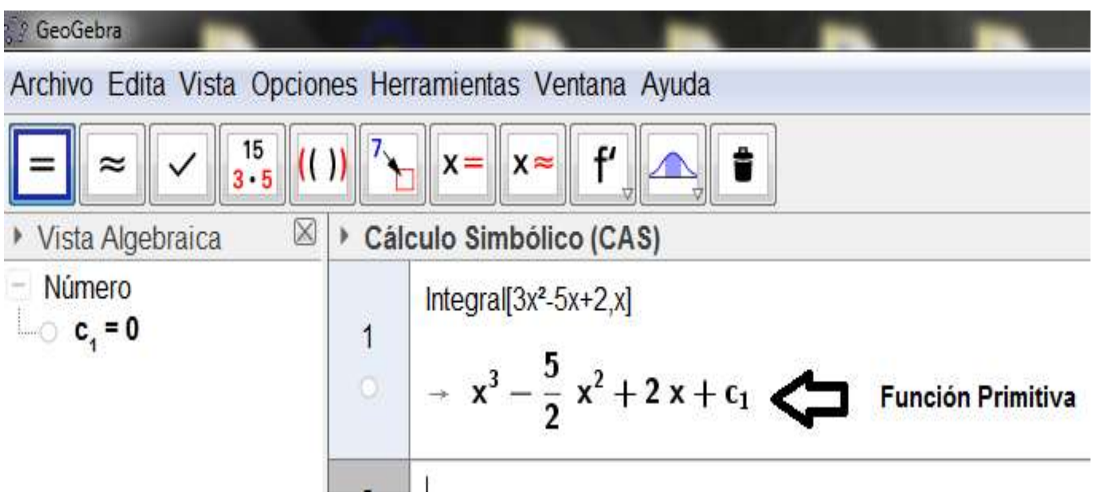
Swokowsky, E. W. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Becerra**,** E.,J.M. (2005). *Matemáticas VI…un paseo sencillo e introductorio al cálculo. Universidad Nacional Autónoma de México.*

Revista ¿cómoves? Año 9, número 103, junio de 2007.

Bibliografía Virtual. Sitios sugeridos.

GeoGebra 5.0 Sistema Algebraico Computacional (CAS).



<https://es.wikipedia.org/wiki/>
<www.librosmaravillosos.com/>
<http://recursostic.educación.es/descartes/web/index.html>
<http://www.wolframalpha.com/>