GUÍA DE: CÁLCULO DIFERENCIAL.

Índice

1. Presentación.

El Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Cálculo Diferencial, constituye una parte vital del proceso *enseñanza-aprendizaje* ya que permite al docente contribuir a mejorar la calidad de los aprendizajes a través del *acompañamiento permanente a lo largo de su trayectoria* en el semestre.

La viabilidad y factibilidad del Programa, se sustenta principalmente en que las actividades del profesor incidan directamente en los aprendizajes de los alumnos, por lo que se espera que esta ***guía*** en principio, resulte atractiva a los estudiantes y que enriquezca el conocimiento adquirido en el aula en una materia de gran dificultad como las Matemáticas. Considerando que la idea sustentada para el desarrollo de esta guía, en cuanto a temática, es bastante rica en ideas matemáticas así como en sus diversas aplicaciones, la introducción de software libre interactivo, permitirá que el estudiante amplíe su horizonte cultural, pues nadie puede dudar que en nuestro contexto las matemáticas juegan un papel de suma importancia afectando, inclusive, los horizontes artísticos y culturales. Más aún, las ideas que subyacen en el paso de los discreto a lo continuo, así como la recuperación de la noción de función con la que llega el estudiante, y con la que de aquí debe salir, son todas ellas cuestiones centrales para su formación propedéutica matemática.

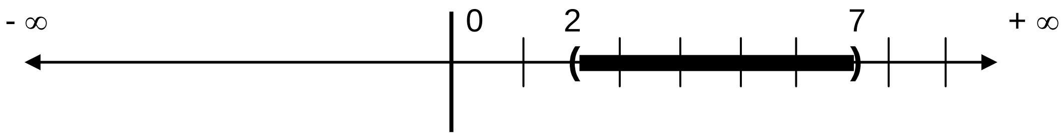
En la actualidad, para tener un conocimiento claro de estas *ideas matemáticas*, es factible (y tal vez necesario) que el estudiante integre dentro de sus posibles instrumentos de conocimiento (o de trabajo), a la *tecnología informática*, cuestión que a todos nos atañe. En este sentido, tenemos la firme convicción de que el empleo de dispositivos informáticos interactivos, como las calculadoras programables y graficadoras, así como el paquete de geometría interactiva ***GeoGebra***, no sólo ponen al tanto al estudiante de la potencia de dicho instrumento, sino que le facilitan la realización de los objetivos planteados para esta Unidad de Aprendizaje, dado que hacen del conocimiento de las matemáticas algo mucho más agradable que el que se obtiene sólo con el uso del lápiz y papel, o del gis y el pizarrón, además de permitirles avanzar de manera individual.

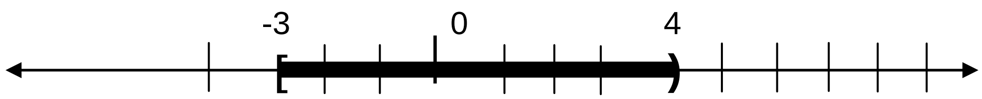
2. INECUACIONES (DESIGUALDADES).

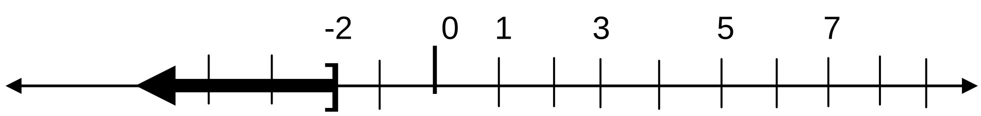
1. Dibuje cada uno de los siguientes intervalos en el eje numérico.

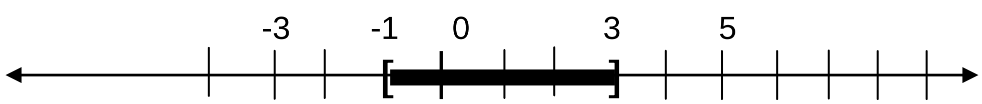
a) $(-4, 1]$ b) $[-4, 1]$ c) $[1, +\infty)$ d) $(-\infty, -4]$

2. Use la notación del problema anterior para describir los siguientes intervalos.

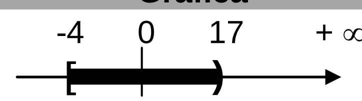
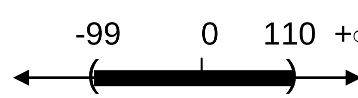
(a)


(b)


(c)


(d)


3. En los siguientes ejercicios completa la tabla.

Notación de Intervalos	Notación de Conjuntos	Gráfica
		
$(7, +\infty)$		
	$\{ x : 15 < x \}$	
$[-10, -\infty)$		
$[-1, -70]$		
	$\{ x : \frac{1}{3} \langle X \leq \frac{22}{7} \}$	
$(\sqrt{2}, 8]$		
		

4. Resuelva y verifique las siguientes inecuaciones expresando el resultado en notación de intervalos, notación de conjuntos y gráficamente

a) $2x + 16 < x + 25$ b) $3x + 5 > 7x + 17$ c) $2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$

d) $2 - x < 5 + 3x$ e) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \langle\; 0$ f) $13 \geq 2x - 3 \geq 5$

g) $x^2 \leq 9$ h) $1 - x - 2x^2 \geq 0$ i) $x^2 > 4$

j) $x^2 + x - 12 < 0$ k) $x^2 - 5x + 6 > 0$ l) $3x^2 - 11x - 4 \leq 0$

m) $4x^2 + 9x < 9$ n) $2x^2 - - 6x + 3 < 0$ o) $x^2 - 3x + 2 > 0$

p) $\left|\frac{x+5}{2x-1}\right| \leq 0$ q) $\left|\frac{2x-3}{x+1}\right| \geq 0$ r) $\left|\frac{1}{x}\right| \langle\; 5$

5. Resuelva y compruebe las siguientes desigualdades expresando el resultado en notación de intervalos, notación de conjuntos y gráficamente.

a) $|\; x - 2 \;| < 5$ b) $\left|\frac{x}{2} + 7\right| \geq 2$ c) $|\; x - 2 \;| < 5$ d) $|\; 2 + \underline{5} \;| > 1$ e) $\left|\frac{1}{x} - 3\right| \rangle 6$

3. FUNCIONES Y LÍMITES.

6. Para la función $g(x) = x^2 - x + 5$, encuentre y simplifique lo siguiente:

a) g(1/2) b) g(0) c) g(4 + h) d) [g(4 + h) – g (2)] / h

e) g(x + h) f) $g(h^2 - 3)$ $g(7 - h^2)$

7. Para la función $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, evalúe:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad h \neq 0$$

8. Si **f** es la función definida por $f(x) = \sqrt{x+1}$ y **g** por $g(x) = \sqrt{x-4}$, encuentre:

a) (f + g)(x) b) (f – g)(x) c) (f * g)(x) d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

9. Si **f** esta definida por la función $f(x) = \sqrt{x}$ y **g** por $g(x) = 2x - 3$, determinar:

a) $(g \circ f)(x)$ b) $(f \circ g)(x)$

10. Determine el dominio, rango y trace la gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = 7x + 2$ b) $y = |x - 5|$ c) $y = x^2 - 6$ d) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

e) $f(x) = y = \sqrt{3x + 4}$ f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 14}$ g) $p(x) = \sqrt{25 - x^2}$

h) $f(x) = |x| + |x - 1|$

11. Determine el dominio, rango y trace la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ b) $g(x) = \dfrac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 9)}{(x^2 + x - 12)(x + 3)}$ c) $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$

d) $y = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$ e) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

f) $y = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x \leq -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{si } -4 < x < 4 \\ 6 - x & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$ g) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - 9x^2 - 3x + 18}{x^2 + x - 6}$

h) $h(x) = \dfrac{2}{(x - 1)}$ i) $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ j) $p(x) = \dfrac{5}{x + 3}$

12. Evalúe cada uno de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1)$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x - 5}{5x - 1}$ c) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{z^2 - 25}{z + 5}$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ e) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ f) $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{3x - 1}{9x^2 - 1}$

g) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$ h) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{4 - t}}{t}$ i) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 8x - 16}{2x^2 - 9x + 4}$

j) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 6}{7x - x^2 - 8x^3}$ k) $\lim\limits_{h \to \infty} \dfrac{3h + 2xh^2 + x^2h^3}{4 - 3xh - 2x^3h^3}$

4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA.

13. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto (x_1 ,$f(x_1)$). Realice una tabla de valores de x_1, $f(x_1)$, m; en el intervalo cerrado $[a,b]$. Trace la gráfica y muestre un segmento de la recta tangente en uno de los puntos trazados.

a. $y = 1 - x^3$; $[-2,2]$

b. $y = 7 - 6x - x^2$; $[-2,3]$

14. Determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva dada en el punto indicado.

a. $y = 2x - x^3$; P(-1,-1)

b. $y = \frac{8}{x}$; P(2,4)

c. $y = 3x^2 - 12x + 8$; P(2,-4)

d. $y = \sqrt{x}$; P(2, $\sqrt{2}$)

e. $y = \frac{1}{x-3}$; P(4,1)

f. $y = x^3 - 2x^2 - 3$; P(2,-3)

15. Obtenga la derivada de las siguientes funciones, utilizando la regla de los cuatro pasos.

a) $f(x) = 7 - 9x^2$

b) $f(x) = \frac{5}{x+1}$

c) $f(x) = 2x^3 - 9$

d) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 3}$

5. DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS POR FÓRMULAS

16. Derive cada una de las siguientes funciones por fórmulas y simplifique la derivada resultante algebraicamente.

1. $y = \frac{1}{2x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}}$
2. $y = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$
3. $r = \left(\sqrt{t} + 1\right)^3$
4. $y = x^3 * \sqrt[3]{x-1}$
5. $\theta = \frac{3r+2}{2r+3}$
6. $y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$
7. $y = x * \sqrt{3-2x^2}$
8. $r = \frac{\sqrt{t+4}}{\sqrt[3]{t-4}}$
9. $y = \sqrt[4]{x^3+7}$
10. $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
11. $z = \frac{w}{\sqrt{1-4w^2}}$
12. $z = \frac{7-9x}{7+9x}$
13. $y = \frac{4}{3x+2}$
14. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+2}}$
15. $y = \frac{3}{x^2+2}$
16. $y = \frac{x^3+3}{x}$
17. $y = t * (4x-3)^3$
18. $y = \frac{3}{(a^2 - x^2)^3}$

19. $y = \dfrac{t}{2t^2 + t + 1}$ 20. $y = \dfrac{3x+1}{2x+6}$ 21. $s = \sqrt{2t - \dfrac{4}{t^3}}$

22. $y = \sqrt{x+3}$ 23. y = $y = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3x-1}}$ 24. $y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$

6. TÉCNICAS DE DERIVACIÓN.

A. FUNCIONES COMPUESTAS; REGLA DE LA CADENA

17. Derive cada una de las siguientes funciones compuestas (dy / dx).

a) y = $\dfrac{u^2-1}{u^2+1}$ y u= $\sqrt{x^2+2}$ b) y = $\dfrac{u-1}{u+1}$ y u = $\sqrt{x}$

B. DERIVACIÒN IMPLICITA

18. Deriva cada una de las siguientes funciones de forma implícita $\left(\frac{dy}{dx};\ \frac{dx}{dx} = 1\right)$.

a) $x^2 + y^2 = 7xy$ b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ c) $2x^3 + 3xy^3 = 5$

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$ e) $\dfrac{7}{x} - \dfrac{7}{y} = 3x$ f) $(2x + 3)^5 = 6y^4$

19. Hallar la pendiente de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto dado.

a) $x^2 + x\,y + 2y^2 = 28$; P(2,3) b) $x^3 - 3y^2 + y^3 = 1$; P(2,-1)

7. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

20. Encuentre la segunda derivada de las siguientes funciones.

a) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ b) $xy^2 + x^2 + 4 = 0$ c) $\dfrac{x+y}{x-y} = x$

d) $x^5 - 6xy^3 - y^4 = 1$ e) $y = x + \sqrt{x}$ f) $y = 18x^{4/3}$

8. MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

21. Dadas las siguientes funciones, determinar: (a) los intervalos en que y es creciente o decreciente, (b) los máximos y mínimos de y.

a. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ b. $y = x^4 - 8x^2 + 16$ c. $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$

d. $y=2x^3+3x^2-12x-10$

e. $y=x^3-3x^2+3$

f. $y=\dfrac{x-2}{x+2}$

g. $y=\dfrac{1}{4}x^4-x^3$

h. $y=3x^4-4x^2-12x^2$

i. $y=x^3-6x^2+9x$

9. PROBLEMAS DE APLICACIÒN DE LA DERIVADA

22. Se tiene una cartulina cuyas dimensiones son 5dm por 8dm .Se cortan pequeños cuadros idénticos en cada esquina y la cartulina sobrante se dobla para formar una caja sin tapa. Hallar las dimensiones de la caja que proporcionará el mayor volumen posible e indique el valor de dicho volumen.

23. Una pelota que se lanza directamente hacia arriba según la ley $s(t)= 25t - 5t^2$ metros. ¿Hasta qué altura ascenderá?

24. La suma de dos números positivos es 20. Hallar los números si (a) su producto es máximo; (b) la suma de sus cuadrados es mínima; (c) el producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro es máximo.
    Solución: (a) 10, 10; (b) 10, 10; (c) 8, 12.
25. El producto de dos números positivos es 16. Hallar los números si (a) su suma es mínima; (b) la suma de uno con el cuadrado del otro es mínima. *Solución:* (a) 4, 4; (b) 8, 2.

26. Un objeto se mueve a lo largo del eje coordenado de modo que su posición (s) satisface $s = 3t^2 - 18t + 9$, donde *(s)* se mide en centímetros y *(t)* en segundos con $t \geq 0$. Determine la velocidad del objeto cuando $t = 1$ y cuando $t = 6$ ¿Cuándo es cero la velocidad? ¿Cuándo es positiva?

27. Un cuerpo se mueve sobre una recta según la ley $s=\dfrac{1}{4}t^3-9t$. Determine su velocidad y aceleración al cabo de 5 segundos.

28. La trayectoria de una partícula en movimiento rectilíneo viene dada por: $s = t^3 - 9t^2 + 24t$.
    a) Encuentre (s) y (a) cuando $v = 0$.
    b) Encuentre (s) y (v) cuando $a = 0$.
    c) ¿Cuándo es (s) creciente?
    d) ¿Cuándo es (v) creciente?
    e) ¿Cuándo cambia la dirección del movimiento?

29. Una piedra, lanzada verticalmente hacia arriba con velocidad inicial de 90 pies /seg., se mueve según la ley $s = 90t - 16t^2$, donde (s) es la distancia del punto de partida, calcular:
    a) La velocidad y aceleración cuando $t = 3$ seg. y $t = 4$ seg.

10. DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.

30. Derive cada una de las siguientes funciones:

$y=e^{-5x}$	$y=a^{\sqrt{x^2+2}}$	$y=4^{\sqrt{2x+3}}$	$y=a^{8x^2}$	$y=e^{-2x}\ln x$
$y=\sqrt{1+e^{2x}}$	$y=x^2e^{-2x}$	$y=\left(e^{4x}-5\right)^3$	$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$	$y=\ln\dfrac{a+x}{a-x}$
$y=\ln\left(e^{4x}+9\right)$	$y=\log\dfrac{x^2+2}{4x}$	$y=\dfrac{x}{e^{x^2}}$		

11. DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS (CIRCULARES DIRECTAS).

31. Derive cada una de las siguientes funciones:

$f(x)=sen(8x+3)$	$f(x)=\dfrac{sen\ x^2}{x^2}$	$f(x)=\sqrt[3]{\cos x}$	$f(x)=x^2\tan x$
$f(x)=\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}$	$f(x)=\tan^3 2x-\sec^3 2x$	$f(x)=6x\csc 3x^2$	$f(x)=\sec\sqrt{x-1}$
$f(x)=\sec\sqrt{x-1}$	$f(x)=\csc\sqrt{x^2+1}$	$f(x)=\dfrac{1-\cos x}{sen\ x}$	$f(x)=sen\ e^{-2x}$

12. DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS (CIRCULARES INVERSAS).

32. Derive cada una de las siguientes funciones:

$f(x)=\tan^{-1}(3x-5)$	$f(x)=e^{-x}arcSec\ e^{-x}$	$f(x)=arcTan\dfrac{x+1}{x-1}$	$y=\ln arcTan\ x^2$
$f(x)=(arcTan\ x)(x^2+1)$	$y=x\arccos\sqrt{4x+1}$	$f(x)=x^2arcTan\ x^2$	$y=arcCsc\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

13. LA DIFERENCIAL.

33. Obtén la diferencial de cada una de las siguientes funciones.

$y=2x^3+x$	$y=\sqrt{2x+1}$	$y=\dfrac{1}{x}$	$f(x)=\cot\sqrt{x^2+8}$	$f(x)=x^2\ln x$
$y=\dfrac{x+1}{2x-1}$	$f(x)=sen\sqrt{2x}$	$f(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-2}$	$f(x)=(\tan x)^{3x}$	$f(x)=e^{e^x}$

14. LA DIFERENCIAL (PROBLEMAS). UTILICE DIFERENCIALES PARA OBTENER UN VALOR APROXIMADO EN CADA UNO DE LOS SIGUIENTES EJERCICIOS.

34. Utilice diferenciales para aproximar el aumento en el área de una burbuja de jabón cuando su radio aumenta de 3 pulgadas a 3.025 pulgadas.

35. Una arista de un cubo se midió como $11.4\,cm$ con un posible error de $\pm 0.05\,cm$. Evalúe el volumen del cubo y proporcione una estimación para el posible error en este valor.

36. El radio interior de una concha esférica es de 4 pulgadas, si el grosor es de $1/16$ de pulgada, utilice diferenciales para aproximar el volumen en la región interior.

37. El interior de un tanque cilíndrico abierto es de 12 pies de diámetro y de 8 pies de profundidad. El fondo es de cobre y los lados son de acero. Utilice diferenciales para encontrar de manera aproximada cuántos galones de pintura a prueba de agua es necesaria para aplicar una capa de 0.05 pulgada a la parte de acero de la parte interior del tanque (1 galón ≈ 231 pulgadas cúbicas).

38. Una caja de metal en forma de un cubo deberá tener un volumen interior de $20\,m^3$. Los 6 lados se construirán de acero de $6\,mm$ de espesor. Si el costo del acero es de $40\,\mathrm{centavos}$ por centímetro cúbico, usar diferenciales para obtener el costo aproximado del acero.

39. ¿Cuál es el valor aproximado del error que puede cometerse al calcular el volumen y el área de un cubo de arista $6\,\mathrm{cm}$, si se comete un error de $0.02\,\mathrm{cm}$ al medir la arista?

40. Las fórmulas para el área de la superficie (S) y el volumen de una esfera son: $S = 4\pi r^2$ y $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si al medir el radio se obtiene $3\,m$

    a) ¿Cuáles son los errores máximos aproximados de A y V si las medidas son seguras hasta $0.01\,\mathrm{m}$?

15. BIBLIOGRAFÍA.

Bibliografía Básica.

Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: *Cálculo Diferencial.* México. 2008.

Purcell, E. J. et al. (2003). *Cálculo Diferencial e Integral.* México. PEARSON. Prentice-Hall.

Fuenlabrada, S. (2008). *Cálculo Diferencial.* México: Mc. Graw-Hill.

Lehmann, Ch. (2008). *Cálculo Diferencial e Integral.* México. Limusa, Grupo Noriega Editores

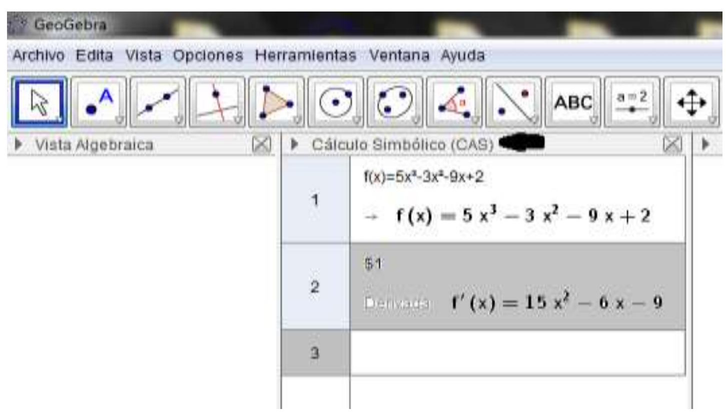
Leithold, Louis. (2004). *Cálculo.* Ed. Oxford.

Swokowsky, E. W. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Becerra**,** E.,J.M. (2005). *Matemáticas VI…un paseo sencillo e introductorio al cálculo. Universidad Nacional Autónoma de México.*

Bibliografía Virtual. Sitios sugeridos.

GeoGebra 5.0
Sistema Algebraico Computacional (CAS).



<https://es.wikipedia.org/wiki/>
<www.librosmaravillosos.com/>
<http://recursostic.educación.es/descartes/web/index.html>
<http://www.wolframalpha.com/>