UNIDAD DE APRENDIZAJE **4º SEMESTRE**

CÁLCULO DIFERENCIAL **ÁREA BÁSICA**

PRIMER PARCIAL

- Funciones
- Límites
- Continuidad

SEGUNDO PARCIAL

- Derivada de funciones algebraicas

TERCER PARCIAL

- Derivada de funciones trascendentes
- Uso de la diferencial

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Cálculo Diferencial e Integral, Larson, H.E., Mc Graw Hill, 2005.
- Cálculo, Stewart, J.,Thompson, 2008.
- Cálculo Diferencial e Integral, Taylor, H.E., Limusa, 2004.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA ACADÉMICA
DIRECCIÓN DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
CENTRO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS
No. 4 LÁZARO CÁRDENAS

Guía de Estudio

Unidad de Aprendizaje: Cálculo Diferencial

Semestre: Cuarto

Turno: Matutino

Academia: Matemáticas

Elaborada por: Lizeth Marianita Hernández Hernández

INTRODUCCIÓN

El propósito principal es preparar al estudiante para que desarrolle competencias en la solución de diversos problemas de variación y rapidez en situaciones geométricas y físicas relacionadas con los ámbitos académico, social y global.

El programa de dicha unidad de aprendizaje comprende las siguientes unidades y en cada una explica la competencia particular que corresponde:

Unidad 1: Funciones, Límites y Continuidad.

Unidad 2: Derivada de funciones algebraicas.

Unidad 3: Derivada de funciones trascendentes y Diferenciales.

OBJETIVOS:

Los objetivos que se buscan están delimitados en cada uno de los Resultados de Aprendizaje Propuestos (RAPS) los cuales se detallan a continuación en orden de cada unidad:

Unidad 1: Funciones, Límites y Continuidad.

RAP 1: Establece el comportamiento de las funciones, a través de su gráfica y sus operaciones.

RAP 2: Emplea la definición y teoremas de límites en la continuidad y discontinuidad de las funciones.

RAP 3: Utiliza funciones y teoremas de límites en la resolución de problemas de su entorno académico.

Unidad 2: Derivada de funciones algebraicas.

RAP 1: Obtiene derivadas de funciones algebraicas a partir de su definición y el uso del formulario, en situaciones académicas.

RAP 2: Aplica la derivada en situaciones geométricas y físicas, en la resolución de problemas, de su entorno académico.

RAP 3: Resuelve problemas de optimización que involucren funciones algebraicas, en situaciones académicas, sociales y globales.

Unidad 3: Derivada de funciones trascendentes y Diferenciales.

RAP 1 : Obtiene derivadas de funciones trascendentes, a partir de la definición de derivada y el uso del formulario, en situaciones académicas.

RAP 2 : Resuelve problemas de optimización con funciones trascendentes, en situaciones académicas.

RAP 3 : Resuelve problemas con el uso de la diferencial, en el entorno académico

JUSTIFICACIÓN

El campo de trabajo requiere hoy en día que los recursos humanos se distingan por capacidades que demuestran mayor dominio de competencias en habilidades propias de cada profesión.

Por lo que la Guía fue elaborada para que el estudiante adquiera los conocimientos del cálculo diferencial y pueda tener éxito en su evaluación y en sus cursos posteriores.

ESTRUCTURA Y CONTENIDOS

Los temas que se desarrollan en esta guía de estudio y conforme al programa de la unidad de aprendizaje son los siguientes:

1. Funciones, Límites y continuidad.
2. Derivada de funciones algebraicas.
3. Derivada de funciones trascendentes y Diferenciales.

EVALUACIÓN

La evaluación se determina por acuerdos de academia, se considera como requisito para presentar el ETS con la entrega en tiempo y forma.

MATERIALES PARA LA ELABORACIÓN DE LA GUÍA.

1. Consulta de Bibliografía suguerida en el programa de estudios.
2. Consulta de paginas electronicas suguerida en el programa de estudios.

ACTIVIDADES DE ESTUDIO

1. Se recomienda que el alumno tome asesorias con algún profesor de la unidad de aprendizaje o bien un curso de preparación trabajando la guía.
2. Se resuelva la presente guía de estudio en actividad colaborativa con sus compañeros que esten en la misma situación.

PROBLEMAS PARA AUTOEVALUACIÓN

1. Resolución de problemas marcados en la Guía.
2. Resolución de problemas citados en la bibliografia y paginas electronicas relacionados con los temas de la guía.

INFORMACIÓN ADICIONAL

Los libros básicos y de consulta sugeridos en clase están disponibles en la biblioteca del CECyT No. 4 Lázaro Cárdenas

Índice general

1. Desigualdades **7**

1.1. Desigualdades lineales 7

1.2. Desigualdades cuadráticas 7

1.3. Desigualdades con valor absoluto 8

2. Funciones **9**

2.1. Definición y Elementos de una función 9

2.2. Operaciones con funciones 10

3. Límites y Derivadas **11**

3.1. Límites 11

3.1.1. Leyes de los límites 11

3.1.2. Límites con álgebra 12

3.1.3. Límites al infinito 12

3.2. Derivadas 13

3.2.1. Derivadas por definición 13

3.2.2. Derivación Implícita 15

3.2.3. Problemas de aplicación 16

Capítulo 1

Desigualdades

1.1. Desigualdades lineales

A. Resuelve las siguientes desigualdades representando la solución en un intervalo y en la recta numérica.

1. $6x - 6 > 9x$
2. $7 - 3x \geq -3 - x$
3. $x + 16 > 25$
4. $7x - 2 \leq 10x + 3$
5. $\frac{x}{3} \leq \frac{x}{4} - 2$
6. $\frac{6x-10}{2} \geq \frac{5x-16}{3}$
7. $-8 < 6x + 10 < 16$
8. $6 \geq 7 - x \geq 2$
9. $-4 \leq \frac{10-6x}{2} \leq 1$
10. $-3 < 4x - 9 < 10$

1.2. Desigualdades cuadráticas

B. Resuelve las siguientes desigualdades cuadráticas

1. $x^2 + 5x + 6 > 0$
2. $x^2 - 10x + 16 > 0$
3. $(6x + 3)(10 - 3x) < 0$

4. $6x^2 - 2x > 8$
5. $8x^2 + 28x - 60 \geq 0$

1.3. Desigualdades con valor absoluto

C. Resuelve las siguientes desigualdades con valor absoluto

1. $|x+1| > 4$
2. $|2x-7| > 3$
3. $|6x+3| < 0$
4. $|\frac{x}{3} - 2| > 8$
5. $|4x+2| \geq 10$

Capítulo 2

Funciones

2.1. Definición y Elementos de una función

A. Contesta las siguientes preguntas de manera correcta.

1. ¿De cuántas formas se puede representar una función?
2. ¿Cuáles son?
3. Da un ejemplo de una función. ¿Por qué es una función?
4. ¿Qué es rango y dominio de una función?
5. Traza la gráfica y encuentra el dominio y rango de cada una de las siguientes funciones
   a) $f(x) = 3x + 1$
   b) $f(x) = 2x^2 - 3$
   c) $f(x) = x^3$
   d) $f(x) = \sqrt{x-5}$
   e) $f(x) = \frac{7x^2+1}{2x^3}$
   f) $f(x) = e^x + 2$
   g) $f(x) = -2\cos x$
6. Evalúa las siguientes funciones con los valores dados
   a) $f(x) = x^2 + 3$ en $x = -2, 0, 1, 2$
   b) $f(x) = -x^2 + 3$ en $x = -2, 0, 1, 2$
   c) $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ en $x = -1, -3, 1, 3$
   d) $f(x) = 3x + senx$ en $x = 0, 2\pi$
7. Determina si f es par, impar o ninguna de las dos
   a) $f(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = -8x^3 + 1$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

d) $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

2.2. Operaciones con funciones

B. Encuentra $f + g$**,** $g - f$**,** $f \cdot g$**,** f/g $f \circ g$

1. $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x + 1$
2. $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 4$
3. $f(x) = 1 - 3x$, $g(x) = 2\cos x$
4. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 4x^2$
5. $f(x) = 6x^3 + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$
6. $f(x) = \cos^{-1} x$, $g(x) = x - 1$

Capítulo 3

Límites y Derivadas

3.1. Límites

A. Contesta las siguientes preguntas de manera correcta

1. ¿Qué describe la expresión $\lim_{x\to a} f(x) = L$?
2. ¿Qué describe la expresión $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$?
3. ¿Qué describe la expresión $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$?

3.1.1. Leyes de los límites

B. Calcula los siguientes límites usando las leyes de los límites

1. $\lim_{x\to a} k =$
2. $\lim_{x\to a} k^n =$
3. $\lim_{x\to a} k^{1/n} =$
4. $\lim_{x\to 3}(2x^2 - 3x) =$
5. $\lim_{x\to 1}(2x^3 - 4x + 1)(3x + 23) =$
6. $\lim_{x\to -2} \frac{5x^4-2x+1}{x^6-1} =$
7. $\lim_{x\to 0} \sqrt{(x^9 - 2x + 9)} =$
8. $\lim_{u\to 5} \sqrt{(u^3 - 3u + 15)} =$
9. $\lim_{x\to 1}(-x^8)(x^2 - 3x + 21) =$
10. $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{2x^2+1}{3x-2}} =$

3.1.2. Límites con álgebra

C. Calcula los siguientes límites utilizando álgebra si es que existen

1. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-6x+5}{x-5} =$
2. $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^3+8} =$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} =$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{x^6-3x^4+5x^2-3x}{2x} =$
5. $\lim_{x\to 16} \frac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2} =$
6. $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{x+1}$
7. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$
9. $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
10. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$
11. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-5x}{x^2-x}$
12. $\lim_{x\to} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

3.1.3. Límites al infinito

D. Calculo los siguientes límites si es que existen

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-3}{2x+1} =$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{x^2+2} =$
3. $\lim_{x\to\infty}(x^2+x^3) =$
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-3x^3+2x-1}{x^2-1} =$
5. $\lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^3-x+1} =$
6. $\lim_{t\to\infty} \frac{t+t^2}{2t-t^2} =$

3.2. Derivadas

3.2.1. Derivadas por definición

A. Calcula la derivada por definición de las siguientes funciones

1. $f(x) = -4x + 5$
2. $f(x) = 2x^2$
3. $f(x) = -3x^2 + 1$
4. $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

Derivadas directas

B. Encuentra la derivada de las siguientes funciones utilizando fórmulas

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = 2x$
3. $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$
4. $f(x) = 12x^9 - 3x^{1/3}$
5. $f(x) = \frac{-23}{x^5} + 3\sqrt{x} - \frac{1}{2x}$
6. $f(x) = 4\cos x - 3e^x + 201$
7. $f(x) = \tan x - \frac{3}{7}x^{14}$
8. $f(x) = 8\ln x + 21x^7 - \frac{2}{9}$
9. $f(x) = 3^x - 21e^x$
10. $f(x) = -\frac{2}{5}\sec x - 3x^{-2}$
11. $f(x) = 19x^{-1} + 6\tan^{-1} x - 6^{-1}$
12. $f(x) = \frac{12x^3 - 4x^2 - 3x}{-4x}$
13. $f(x) = \frac{-2x^5 - 3x^2}{x^{-2}}$
14. $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 3)$
15. $f(y) = (2y - 3y^5)(2y + 3y^5)$
16. $f(x) = 3x + \cos(x)$
17. $f(x) = \tan^{-1}(4x)$
18. $f(x) = \frac{8\cos^{-1}(x)}{\sqrt{5}}$
19. $f(x) = \cot^{-1}(x) + e^x - 3x + 2$

Recta tangente

C. Encuentra la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto dado

1. $y = 2x - 3x^2$, $(2, -8)$
2. $y = 2\sqrt{x}$, $(1, 2)$
3. $y = 3\cos x$, $(0, 3)$

Regla del producto

D. Calcula las siguientes derivadas aplicando Regla del Producto

1. $f(x) = (x^2)(16x^3 - 3x + 13)$
2. $f(x) = (x^2 + 17)(x^3 - 3x + 1)$
3. $f(x) = (x^4 - 1)(x^2 + 1)$
4. $f(x) = (12x^3 - 45x + \cos x)(x^{-3} + 3x + 21)$
5. $f(x) = (\frac{2}{x} - 3x^3)(2e^x + 34x^2)$
6. $f(x) = (\frac{2-3\ln x}{123})(3\tan x - 2)$
7. $f(x) = (6x^2 - 12)^2$

Regla del cociente

E. Calcula las siguientes derivadas aplicando Regla del Cociente

1. $f(x) = \frac{3}{5x^5}$
2. $f(x) = \frac{1}{3x^2+1}$
3. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
4. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+4}$
5. $f(x) = \frac{6\cos x+3e^x}{2x^5+1}$
6. $f(x) = \frac{-x^9+21senx}{e^x+\ln x}$
7. $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$

Regla de la cadena

F. Calcula las siguientes derivadas aplicando Regla de la Cadena

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 21}$
2. $f(x) = \ln(x-1) + 12(x^3 - 4x + 2)^4$
3. $f(x) = \cos(5x^8 - 3x^5) - e^{6x^2} - 3(12x^2 - 4)^4$
4. $f(x) = 9^{x-5} + 12\sec^{-1}(2x^2)$
5. $f(x) = e^{e^{\cos x}} + 3x^2 - 1$
6. $f(x) = sen(12x^4 + \ln x) + 3^{2x}$
7. $f(x) = \sqrt{12x^3 - \cos(8x^9 - 1) - 1}$
8. $f(x) = 3x + \cos(x^2 - 1)$
9. $f(x) = \tan^{-1}(4x + 1)$
10. $f(x) = \frac{8\cos^{-1}(4senx)}{\sqrt{5}}$
11. $f(x) = \cot^{-1}(4e^x - 3x + 2)$

3.2.2. Derivación Implícita

A. Encuentra y' por derivación implícita

1. $27x^2 - 3y^2 = 3$
2. $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 2$
3. $senx + \sqrt{y} = 5$

B. Encuentra dy/dx por derivación implícita

1. $x^3 + y^3 = 1$
2. $x\cos y = x^2$
3. $3\cos x seny = 1$
4. $x^2 + 3xy - 2y^2 = 1$
5. $e^x senx = x + xy$

3.2.3. Problemas de aplicación

1. La posición de una partícula está dada por la siguiente función

$$f(t) = 2t^3 - 12t^2 + 18t$$

donde t se mide en segundos y la posición en metros.

   a) Encuentra la velocidad en el instante t.
   b) ¿Cuál es la velocidad después de 2 y 4 segundos?
   c) Halla la aceleración en el tiempo t y después de 4 segundos.

2. Encuentre la razón de cambio promedio del área de un círculo respecto a su radio r cuando éste cambia de

   a) 2 a 3
   b) 2 a 2.5
   c) 2 a 2.1

3. El número de células de levadura en un cultivo de laboratorio aumenta rápidamente al principio, pero finalmente de nivela. La población es modelada por la función

$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-0{,}7t}}$$

donde t es medido en horas. En el tiempo $t = 0$ la población es de 20 celdas y está aumentando a un ritmo de 12 células/hora. Encuentra los valores de a y b.

4. La función de costo de producción de una mercancía es

$$C(x) = 0{,}0004x^3 - 0{,}09x^2 + 25x + 339$$

   a) Calcula $C'(100)$
   b) ¿Cómo interpretas $C'(100)$?

5. Se infla un globo esférico y su volumen crece a razón de $100cm^3/s$. ¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de 50 cm?.

6. Un depósito para agua tiene la forma de un cono circular invertido; el radio de la base es de $2m$, y la altura es de $4m$. Si el agua se bombea hacia el depósito a razón de $2m^3/min$, determina la rapidez a la cual el nivel del agua sube cuando el agua tiene $3m$ de profundidad.

Bibliografía

[1] James Stewart, Cálculo de una variable trascendentes tempranas. Séptima edición. Universidad de Toronto.

[2] Cálculo con geometría analítica. W Swokwoski, Iberoamericana segunda edición.

Formulario

$$\frac{d}{dx}C = 0$$

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

$$\frac{d}{dx}(U + V - W) = \frac{d}{dx}U + \frac{d}{dx}V - \frac{d}{dx}W$$

$$\frac{d}{dx}CU = C\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}U^n = nU^{n-1}\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}UV = U\frac{d}{dx}V + V\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\frac{U}{V} = \frac{V\frac{d}{dx}U - U\frac{d}{dx}V}{V^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{U} = \frac{1}{2\sqrt{U}}\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}e^U = e^U\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}sen^{-1}U = \frac{\frac{d}{dx}U}{\sqrt{1-U^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}U = \frac{\frac{d}{dx}U}{1+U^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}U = \frac{\frac{d}{dx}U}{|U|\sqrt{U^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\ln U = \frac{1}{U}\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}a^U = a^U\ln a\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}U^V = VU^{V-1}\frac{d}{dx}U + UV\ln U\frac{d}{dx}V$$

$$\frac{d}{dx}senU = \cos U\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\cos U = -senU\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\tan U = \sec^2 U\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\cot U = -\csc^2 U\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\sec U = \sec U\tan U\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\csc U = \csc U\cot U\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}U = \frac{-\frac{d}{dx}U}{\sqrt{1-U^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}U = \frac{-\frac{d}{dx}U}{1+U^2}$$

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}U = \frac{-\frac{d}{dx}U}{|U|\sqrt{U^2-1}}$$