INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
DIRECCIÓN DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
CENTRO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS No. 4
“GRAL. LÁZARO CÁRDENAS DEL RÍO”

ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA UNIDAD 3. TRIGONOMETRÍA DE LA ASIGNATURA DE GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA.

Elaborado por: Profr. Roberto Pedro Robledo Arana

Aprendizajes esperados: al finalizar la estrategia didáctica, el alumno:

- Conocerá la historia de la trigonometría.
- Conocerá las aplicaciones de la trigonometría en la vida cotidiana y en diferentes ramas de la ciencia
- Comprende que el concepto de razón trigonométrica se deriva de la relación de los lados de un triángulo rectángulo.
- Resuelve problemas que involucren triángulos rectángulos.
- Reconoce el Teorema de Pitágoras desde el punto de vista algebraico.
- Calculará las razones trigonométricas faltantes de un triángulo rectángulo, dada una razón trigonométrica.
- Resolverá problemas de ángulos de elevación y depresión.
- Resolverá identidades trigonométricas utilizando las fórmulas correspondientes para cada caso.
- Reconocerá la diferencia entre ecuación algebraica y ecuación trigonométrica y resolverá ecuaciones trigonométricas entre $[0,360°]$.
- Convertirá medidas angulares de grados a radianes y viceversa,
- Identificará en las funciones del tipo $y = a * Sen(bx)$ y $y = a * Cos(bx)$, los parámetros a y $b.$ Así como su comportamiento.
- Resolverá problemas sobre triángulos acutángulos y oblicuángulos.

Unidad 3. Trigonometría.

1. La trigonometría.

Es una rama de las tantas ramas de matemáticas, se encarga de estudiar y analizar la relación entre los lados y los ángulos de los triángulos. Para esto recurre generalmente a las llamadas razones trigonométricas. El origen de la palabra trigonometría desciende del griego "**trigonos**" (triángulo) y "**metros**" (metria). Consulta el código QR, de la derecha para saber acerca de la historia de la Trigonometría.

Historia de la Trigonometría

2. Aplicaciones de la trigonometría en la vida cotidiana.

Existen diversas **aplicaciones de la trigonometría** en la ciencia y en la vida cotidiana. Uno de los ejemplos más notables de ello es en la matemática, ya que interviene en todos sus campos (apóyate del código QR).

Otras de sus aplicaciones más destacadas se muestran en la navegación, la geografía, la astronomía, la arquitectura y en todos los campos de la ingeniería. La utilización de la trigonometría en las ciencias y en la vida cotidiana se debe a que a través de esta se obtienen medidas precisas.

Las medidas se obtienen mediante el estudio de las relaciones existentes entre los lados de los triángulos con respecto a los ángulos. Para ello es necesario aplicar las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

La trigonometría es la rama de las matemáticas que es necesaria tanto para el estudio geométrico como para el cálculo y el análisis matemático. El uso de la trigonometría en las ciencias y en la vida cotidiana se remonta aproximadamente al año 4000 a. C.
De acuerdo con los datos históricos, el uso de la trigonometría inició en Babilonia y en Egipto, ya que para poder realizar sus construcciones fue necesario realizar grandes cálculos.

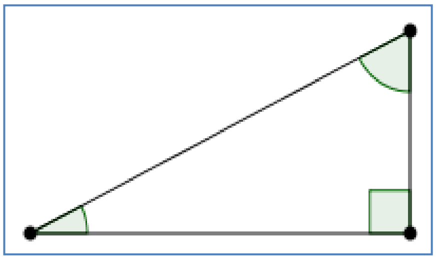
Aplicaciones de la Trigonometría en la Vida Cotidiana

3. Razones Trigonométricas

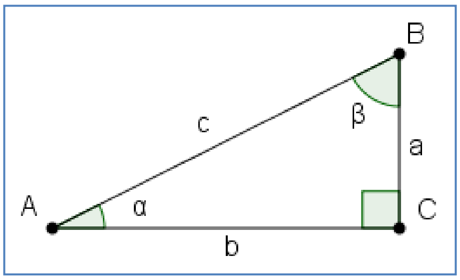
Fase de inicio.

Actividad 1. Realiza las siguientes operaciones paso a paso. Visita el siguiente código QR para conocer las Razones Trigonométricas. Una vez que lo hayas visitado, saca la información relativa al tema en tu cuaderno para realizar esta actividad.

Razones Trigonométricas



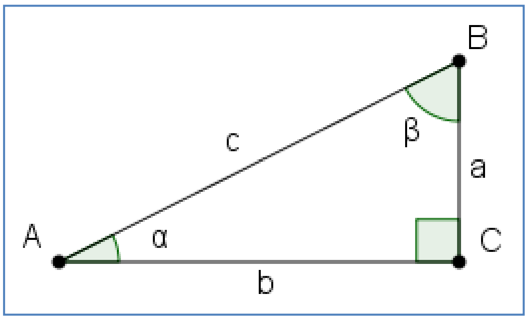
1. Apóyate en el triángulo rectángulo de la izquierda.
2. Asigna a los ángulos agudos los nombres de α y β.
3. Nombre el vértice que corresponde al ángulo α con la letra A y al cateto opuesto a dicho ángulo con la letra a.
4. Nombre el vértice que corresponde al ángulo β con la letra B y al cateto opuesto a dicho ángulo con la letra b.
5. El vértice que corresponde al ángulo recto nómbralo con la letra C, y a la hipotenusa con la letra c.



6. El cateto opuesto al ángulo α es: _________.
7. El cateto adyacente al ángulo α es: _______
8. La hipotenusa es: ____________________.
9. Cómo la suma de las magnitudes de α y β es de _____ los ángulos se llaman. _________________.

Al terminar se deben formar equipos de 2 o 3 alumnos para revisar sus resultados, en caso de duda deben preguntarle a su profesor.

Fase de Desarrollo.

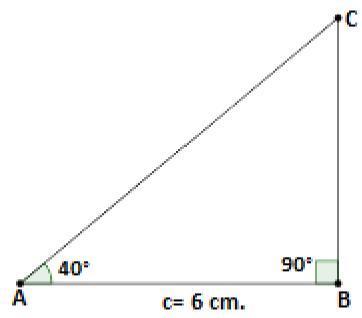


10. De acuerdo con la siguiente figura, escribe las definiciones correspondientes.

Sen α = ———	Cos α = ———	Tan α = ———
Cotan α = ———	Sec α = ———	Csc α = ———

11. Traza un segmento $\overline{AB}$ de 6 centímetros de longitud.
12. En el extremo A traza un ángulo de 40º.
13. En el extremo B traza un ángulo de 90º.
14. Prolonga la perpendicular y el lado terminal del ángulo de 40º hasta que se corten en el punto C.

La figura obtenida debe ser parecida a la siguiente.



15. La magnitud del ángulo <ACB es. _______________.
16. El cateto $\overline{BC}$ mide. ________________.
17. La hipotenusa $\overline{AC}$ mide. ____________.
18. Calcula hasta centésimos las siguientes razones trigonométricas considerando las magnitudes que obtuviste.

Sen 40º = ———	Cos 40º = ———	Tan 40º = ———
Cotan 40º = ———	Sec 40º = ———	Csc 40º = ———

19. Utilizando la calculadora obtén el seno, coseno y tangente de 40º y compara los valores que obtuviste con los de la calculadora.

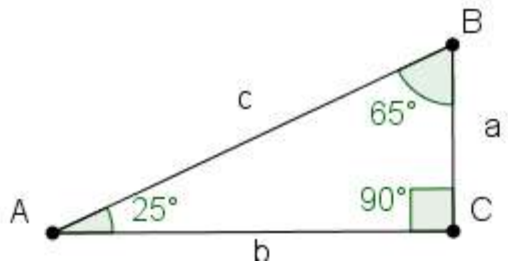
Sen 40º = ———	Cos 40º = ———	Tan 40º = ———

20. ¿Son iguales o diferentes? ___________________.

21. En caso de ser diferentes, escribe la magnitud de las diferencias.

Sen 40º - Sen 40º = ___ Manual calculadora	Cos 40º - Sen 40º = ___ Manual calculadora	Tan 40º - Tan 40º = ___ Manual calculadora

22. ¿Se pueden obtener las razones trigonométricas cotangente, secante y cosecante, con la calculadora? ________________.
23. Traza un triángulo rectángulo cuyos ángulos midan 25º - 65º - 90º.



24. La magnitud del cateto a es = ____________.
25. La magnitud del cateto b es = ____________.
26. La magnitud de la hipotenusa c es = _______.
27. Con respecto al $< 25°$ el cateto adyacente es __________ el cateto opuesto es ___________ y la hipotenusa es ____________.

28. Encuentra el valor de las siguientes razones trigonométricas aproximadas hasta centésimos.

Sen 25º = ———	Cos 25º = ———	Tan 25º = ———

29. Con respecto al $< 65°$ el cateto adyacente es __________ el cateto opuesto es ___________ y la hipotenusa es ____________.

30. Encuentra el valor de las siguientes razones trigonométricas aproximadas hasta centésimos.

Sen 65º = ———	Cos 65º = ———	Tan 65º = ———

Fase de Cierre.

En plenaria con ayuda del profesor se revisan todos los resultados obtenidos en la secuencia, y se resuelven los siguientes ejercicios.

31. Si sen(α) = 0.6, ¿se pueden encontrar las demás razones trigonométricas? Busquen dos números a y c, cuyo cociente sea $\frac{a}{c} = 0.6$, a = _____, c = _______.

32. Por la definición del seno, el número a representa la longitud del cateto __________ y c representa la longitud de la ______________, aplicando el teorema de Pitágoras la longitud del cateto ____________ es = _____________.

Dibuja un triángulo rectángulo cuyos lados tengan las longitudes obtenidas y marca el ángulo α en el lugar correcto, las demás razones trigonométricas son.

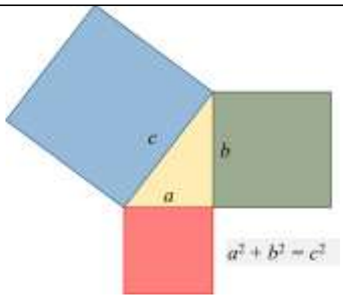
Sen α = —— = 0.6	Cos α = ——	Tan α = ——
Cotan α = ——	Sec α = ——	Csc α = ——

33. Traza un triángulo rectángulo cuyos ángulos midan 30º - 60º - 90º y encuentra el valor de las razones trigonométricas del ángulo de 60º.

Sen 60º = ——	Cos 60º = ——	Tan 60º = ——
Cotan 60º = ——	Sec 60º = ——	Csc 60º = ——

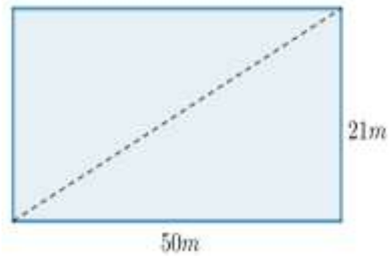
4. Teorema de Pitágoras.

Visita los siguientes códigos QR, para conocer acerca del teorema de *Pitágoras,* el cual está íntimamente ligado con el problema 2, titulado "natación", el cual tiene múltiples aplicaciones en distintas ramas de la ciencia y en particular en Geometría. Por otro lado, una vez que hayas entrado a los códigos saca una copia con la información relativa al tema o cópiala en tu cuaderno ya que esta la vas a usar en las siguientes actividades.

Teorema de Pitágoras. Enunciado y ejercicios.		**Teorema de Pitágoras. Ejercicios de práctica.**

La natación; uno de los ejercicios físicos más completos.
La Federación Internacional de Natación señaló que una piscina olímpica debe medir **50 metros de largo** y un mínimo de 21 metros de ancho, con una

profundidad mayor a los dos metros. Además, este tipo de piscinas cuentan con ocho carriles de 25 metros de anchura cada uno.



Problema 2. Natación.
Un joven desea saber cuántos metros nadó al cruzar en diagonal una alberca olímpica que mide 50 metros por 21 metros.

Tarea 6. Teorema de Pitágoras.

1. Apoyándote el los códigos QR, resuelve el problema 2.

Solución:

2. Completa la siguiente tabla.

Triángulos dibujados	Medidas de sus catetos		Medida de su hipotenusa	Cuadrados de los catetos		Suma de los cuadrados de los catetos	Cuadrado de la hipotenusa
Δ 1	3	4					
Δ 2	8		10				
Δ 3		7	13				
Δ 4	120		130				

4. Resuelve los siguientes problemas, donde tienes que formar un triángulo rectángulo para encontrar lo que se pide.

a. Se cuenta con una escalera de 25 metros y se desea subir al extremo de una torre de 21.6 metros de altura. ¿A qué distancia se necesita colocar la base de la escalera para que el otro extremo coincida con la punta de la torre?

b. Una escalera de 13 metros se apoya en un muro de un edificio. Sí el pie de la escalera está a 5 metros de la base del edificio. ¿A qué altura toca el edificio?

c. Una rampa cubre 3 metros de terreno, si la rampa tiene 4 metros de largo. ¿Qué tanto se eleva?

d. Un satélite de transmisiones se encuentra a 90 mil metros sobre una estación de radio X, si otra estación de radio Y, se encuentra a una distancia de 50 mil metros de la estación X. ¿Qué distancia hay del satélite a la estación Y?

e. Calcular la altura de un triángulo isósceles, si su base mide 70 cm, y cada uno de sus lados iguales mide 50 cm.

f. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 20 cm y el otro cateto mide 12 cm menos que la hipotenusa. ¿Calcular el valor de estos lados?

g. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 56 cm, y un cateto mide 17 cm más que el otro. Calcular la longitud de los catetos.

h. El área de un triángulo rectángulo es de 88 cm cuadrados, y un cateto es mayor que el otro por 5 cm. Calcular la longitud de sus lados.

i. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20m; un cateto mide 3metros más que el otro ¿cuánto mide cada cateto?

5. Funciones Trigonométricas. Parte 2.

Actividad 1. Visita el código QR de la derecha, para conocer la forma de encontrar las demás funciones trigonométricas si se conoce una, saca una copia de la información relativa al tema y cópiala en tu cuaderno.

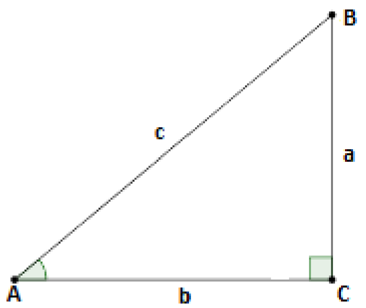
Encontrar las demás funciones trigonométricas si se conoce una.

A partir de lo leído y tomando en cuenta también el siguiente ejemplo, resuelve la tarea 7 apoyándote con lo expuesto líneas arriba.

Ejemplo1. Dada la función $CotA = -\frac{10}{7}$ hallar las demás.

Solución:

Primeramente recordemos que en un triángulo rectángulo, podemos formar las seis funciones trigonométricas siguientes de cualquier ángulo agudo, en este caso tomamos el ángulo A.



Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

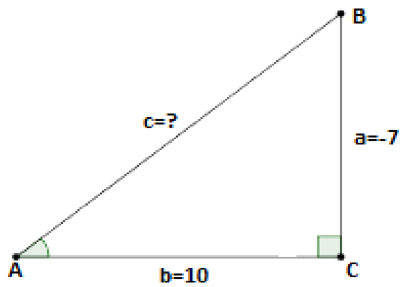
$$SenA = \frac{CO}{h} = \frac{a}{c} \qquad CotA = \frac{CA}{CO} = \frac{b}{a}$$

$$CosA = \frac{CA}{h} = \frac{b}{c} \qquad SecA = \frac{h}{CA} = \frac{c}{b}$$

$$TanA = \frac{CO}{CA} = \frac{a}{b} \qquad CscA = \frac{h}{CO} = \frac{c}{a}$$

Siendo: $CO = Cateto\ opuesto$
$CA = Cateto\ adyacente$
$h = Hipotenusa$

Considerando que la función dada es: $CotA = -\frac{10}{7}$, sabemos que la $CotA = \frac{CA}{CO}$, el signo (-) de la función dada se le tiene que poner a cualquier cateto, nunca a la hipotenusa aun cuando en este caso no hay hipotenusa, por lo tanto: $CotA = \frac{10}{-7} = \frac{CA}{CO}$, falta la hipotenusa, la cual la obtenemos utilizando el teorema de Pitágoras.



$$c^2 = (-7)^2 + (10)^2 = 49 + 100 = 149$$

$$c = \sqrt{149}$$

Finalmente, las funciones faltantes son:

$$SenA = \frac{-7}{\sqrt{149}} - \frac{7}{\sqrt{149}}$$

$$CosA = \frac{10}{\sqrt{149}} \qquad SecA = \frac{\sqrt{149}}{10}$$

$$TanA = \frac{-7}{10} = -\frac{7}{10}$$

$$CscA = \frac{\sqrt{149}}{-7} = -\frac{\sqrt{149}}{7}$$

Tarea 7. Dada una función Trigonométrica, hallar las demás.

1. $CosA = \frac{4}{5}$ **2.** $Tan\phi = -\frac{6}{10}$ **3.** $Sen\beta = \frac{2}{3}$

4. $Sen\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **5.** $Sec\phi = -2$ **6.** $Cos\alpha = \frac{1}{3}$

7. $Sec\beta = 4$ **8.** $Tan\theta = -1$ **9.** $Csc\theta = -\frac{4\sqrt{7}}{7}$

6. Ángulos de Elevación y Depresión.

Actividad 1. Visita el código QR de la derecha, para conocer acerca de los ángulos de elevación y depresión, saca una copia de la información relativa al tema y cópiala en tu cuaderno.

Ángulo de elevación y depresión. Ejercicios resueltos

A partir de lo expuesto en el código QR, resuelve la tarea 8 apoyándote con la información que obtuviste líneas arriba.

Figura 1. Elementos de los ángulos de elevación y Depresión

Tarea 8. Ángulo de elevación y depresión.

1. Desde un punto sobre el piso, localizado a 120m, de la Torre Eiffel se observa que el ángulo de elevación a la punta de la torre es de 68^0. Determina la altura de la torre.

2. Desde la punta de una roca que se eleva verticalmente 240m fuera del agua, se observa un ángulo de depresión de 30^0 con respecto a un bote. Hallar la distancia del bote al pie de la roca.

3. Un alumno mide 1.75m de alto, debido al sol proyecta una sombra de 2.35m. ¿Determina el valor del ángulo que forman los rayos del sol y la tierra?

4. Un cable está sujeto a lo alto de una antena de radio y a un punto en el suelo que está a 26.32m de la base de la antena. Si el alambre hace un ángulo de $58^0 20'$ con el suelo, calcula la longitud del alambre.

5. Calcula el valor del ángulo (en grados minutos y segundos) que se forma con el sol y el horizonte en el momento en que un edificio de 50m de altura proyecta una sombra de 137m.

6. Desde lo alto de un edificio con vista al mar, un observador avista una lancha que navega directamente hacia el edificio. Si el observador está a 34m, snm (sobre el nivel del mar) y el ángulo de depresión de la lancha cambia de $23^0 18'$ a 38^0 durante el periodo de observación, calcula la distancia que recorre la lancha.

7. A medida que un globo de aire caliente sube, su ángulo de elevación desde un punto al nivel del suelo situado a 110 km de distancia con respecto a la horizontal del globo, cambia de $22^0 40'$ a $33^0 50'$. ¿Aproximadamente cuanto sube el globo durante este periodo?

7. Identidades Trigonométricas.

La ***identidad trigonométrica*** es una igualdad algebraica entre las razones de un mismo ángulo que se verifican (demuestran) para cualquier valor que se atribuya a dicho ángulo.

Para poder verificar (demostrar) una identidad trigonométrica, hay que tener presente las siguientes igualdades algebraicas, llamadas también *identidades trigonométricas.*

Recíprocas	Por Cociente	Pitagóricas
$Sen\alpha * Csc\alpha = 1$ $Cos\alpha * Sec\alpha = 1$ $Tan\alpha * Cot\alpha = 1$	$Tan\alpha = \dfrac{Sen\alpha}{Cos\alpha}$ $Cot\alpha = \dfrac{Cos\alpha}{Tan\alpha}$	$Sen^2\alpha + Cos^2\alpha = 1$ $Csc^2\alpha = Cot^2\alpha + 1$ $Sec^2\alpha = Tan^2\alpha + 1$

Actividad 1. Visita el código QR de la derecha, para conocer acerca de las identidades trigonométricas, en particular como verificar las o demostrarlas, saca una copia de la información relativa al tema y cópiala en tu cuaderno.

Identidades Trigonométricas ejercicios resueltos

A partir de lo leído y tomando en cuenta también los siguiente ejemplos, resuelve la tarea 9 apoyándote con lo expuesto líneas arriba.

Demostrar que las siguientes ecuaciones son identidades.	
a) $\dfrac{Tan^2 a}{1+Tan^2 a} = 1 - \dfrac{1}{Sec^2 a}$ Se resuelve la operación indicada en el segundo miembro de la ecuación. $\dfrac{Tan^2 a}{1+Tan^2 a} = \dfrac{Sec^2 a - 1}{Sec^2 a}$ Recordamos las identidades pitagóricas: $Tan^2 a = Sec^2 a - 1$ y $Sec^2 a = 1 + Tan^2 a$ Sustituimos en el segundo miembro de la igualdad anterior quedando: **Identidad:** $\dfrac{Tan^2 a}{1+Tan^2 a} = \dfrac{Tan^2 a}{1+Tan^2 a}$ Con esto se demuestra que la ecuación original es una identidad.	b) $Sen\alpha * Sec\alpha = Tan\alpha$ Se demuestra de izquierda a derecha. De las identidades recíprocas Recuerda que $Cos\alpha * Sec\alpha = 1$ Despejando $Sec\alpha = \dfrac{1}{Cos\alpha}$, misma que se sustituye en la ecuación original: $Sen\alpha * \dfrac{1}{Cos\alpha} = Tan\alpha$ Realizando operaciones tenemos: $\dfrac{Sen\alpha}{Cos\alpha} = Tan\alpha$ **Lo cual verifica la identidad:** $Tan\alpha = Tan\alpha$

Tarea 9. Identidades trigonométricas. Verifica las siguientes identidades:

1. $SenA * CotA = \cos A$	**10.** $\dfrac{Tan^2 a}{1+Tan^2 a} \cdot \dfrac{1+Ctg^2 a}{Ctg^2 a} = Sen^2 a * Sec^2 a$
2. $Sec\theta - Tan\theta * Sen\theta = Cos\theta$	**11.** $1 - \dfrac{Cos^2\theta}{1+Sen\theta} = Sen\theta$
3. $\left(1 - sen^2\theta\right)\left(1 + \tan^2\theta\right) = 1$	**12.** $\dfrac{1-2*Cos^2 B}{SenB * CosB} = TanB - CotB$
4. $CosA * TanA = SenA$	**13.** $\dfrac{Sen\alpha}{1+Cos\alpha} + Cot\alpha = Csc\alpha$
5. $Cotx + \dfrac{Senx}{1+Cosx} = Cscx$	**14.** $\dfrac{sen\alpha * Cos\alpha}{Cos^2\alpha - Sen^2\alpha} = \dfrac{Tan\alpha}{1-Tan^2\alpha}$
6. $Csc^2\beta * Tan^2\beta = Sec^2 B$	**15.** $\dfrac{1}{Sec^2 A} + \dfrac{1}{Csc^2 A} = 1$
7. $Sen^2 A(1+Cot^2 A) = 1$	**16.** $\dfrac{Sen\beta}{1-Cos\beta} = \dfrac{1+Cos\beta}{Sen\beta}$
8. $\dfrac{Sec^2 a Ctg a}{Csc^2 a} = Tan a$	
9. $\dfrac{1-Tan^2 A}{1+Tan^2 A} = 2Cos^2 A$	

8. Ecuaciones Trigonométricas.

Para poder resolver ecuaciones trigonométricas, hay que tener en cuenta los signos de las funciones en los cuatro cuadrantes, como se muestra en la figura 2 y en el resumen de la tabla 1.

Figura 2. Signos de las Funciones Trigonométricas en el Plano Cartesiano

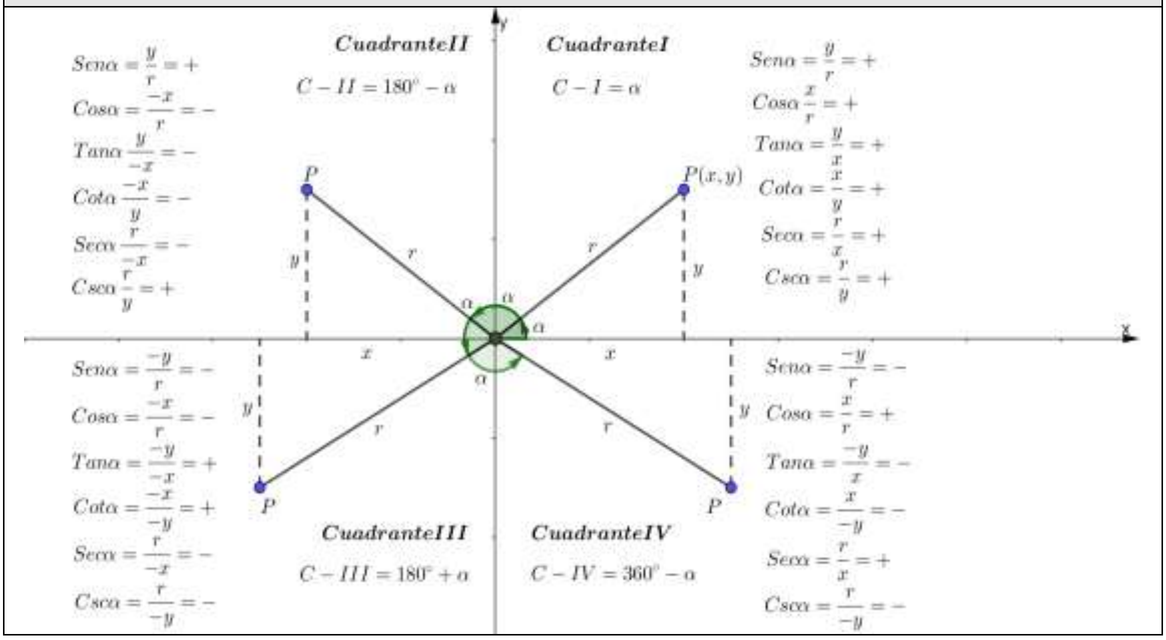


Tabla 1. Resumen de los signo de las funciones trigonométricas en el plano cartesiano.						
Cuadrante	**sen (α)**	**cos (α)**	**tan (α)**	**cot (α)**	**sec (α)**	**csc (α)**
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

Ahora bien, una ecuación trigonométrica es una igualdad entre funciones trigonométricas de un mismo ángulo que sólo se satisface para un determinado valor, o valores del ángulo. Para resolver ecuaciones trigonométricas debemos aplicar los mismos métodos que estudiamos en álgebra.

A continuación se muestra el procedimiento para una ecuación algebraica y uno comparativo para una ecuación trigonométrica, Para esta última hay que tener en cuenta los signos de la función trigonométrica en el plano cartesiano.

En Álgebra	En Trigonometría
1. Resuelve la ecuación: $5x-15=0$. Solución: despejando a x. $5x=15$ $x=\frac{15}{5}$ $x=3$ 2. Resuelve la ecuación: $3x^2+5x-2=0$. Usando la fórmula: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. $a=3,\quad b=5\quad y\quad c=-2$ $x=\frac{-(5)\pm\sqrt{(5)^2-4(3)(-2)}}{2(3)}$ $x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{-5\pm 7}{6}$ $x_1=\frac{-5+7}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ $x_2=\frac{-5-7}{6}=\frac{-12}{6}=-2$	**Resuelve las siguientes ecuaciones para todos los valores del ángulo entre:** **[0 , 360°]** 1. Resuelve la ecuación: $4Sen\alpha-2=0$. Solución: despejando al $Sen\alpha$: $4Sen\alpha=2$ $Sen\alpha=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $\alpha=Sen^{-1}\frac{1}{2}=30°$ Como el seno es positivo, considerando la figura 2, el seno es positivo en los cuadrantes *I* y *II*, por lo tanto en el cuadrante *I*, $\alpha=30°$ y en el cuadrante II, de usa $C-II=180-\alpha$. Así: $\alpha=180°-30°=150°$. La ecuación se satisface cuando: $\alpha=30°$ y $\alpha=150°$.

3. Resuelve la ecuación: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Usando la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$a = 1, \quad b = -3 \quad y \quad c = 2$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

2. Resuelve la ecuación: $2Sen^2\alpha - 5Sen\alpha + 2 = 0$.

Dividimos cada término entre el coeficiente de: $Sen^2\alpha$.

$$Sen^2\alpha - \frac{5}{2}Sen\alpha + 1 = 0$$

Usando la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$a = 1, \quad b = -\frac{5}{2} = -2.5 \quad y \quad c = 1$$

Ahora: $x = Sen\alpha$.

$$Sen\alpha = \frac{-(-2.5) \pm \sqrt{(-2.5)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$Sen\alpha = \frac{2.5 \pm \sqrt{6.25 - 4}}{2} = \frac{2.5 \pm \sqrt{2.25}}{2}$$

$$Sen\alpha = \frac{2.5 \pm 1.5}{2}$$

$$Sen\alpha = \frac{2.5 + 1.5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$Sen\alpha = \frac{2.5 - 1.5}{2} = \frac{1}{2}$$

Como el seno no puede ser mayor que 1, entonces nos quedamos con: $Sen\alpha = \dfrac{1}{2}$.

$$\alpha = Sen^{-1}\frac{1}{2} = 30°$$

Y al igual que el ejemplo anterior:
La ecuación se satisface cuando:

$\alpha = 30°$ y $\alpha = 150°$.

3. Resuelve la ecuación: $2Cos^2\alpha - Cos\alpha - 1 = 0$.

Usando la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$a = 2, \quad b = -1 = -2.5 \quad y \quad c = -1$$

Ahora: $x = Cos\alpha$.

$$Cos\alpha = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$

$$Sen\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$Cos\alpha_1 = \frac{1+3}{4} = 1 \quad Cos\alpha_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_1 = Cos^{-1}1 = 0°$$

Según la figura 2, el coseno es positivo en el primero y cuarto cuadrante, por lo tanto: $\alpha_1 = 0°, 360°$.

Con $\alpha_2 = Cos^{-1} - \dfrac{1}{2} = 120°$, de forma análoga, el coseno es negativo en el segundo y tercer cuadrante, por lo tanto:

$$\alpha_2 = 120°, 240°$$

Actividad 1. Visita el código QR de la derecha, para conocer acerca de las ecuaciones trigonométricas, saca una copia de la información relativa al tema y cópiala en tu cuaderno, con la información anterior y el código QR, resuelve la tarea 10.

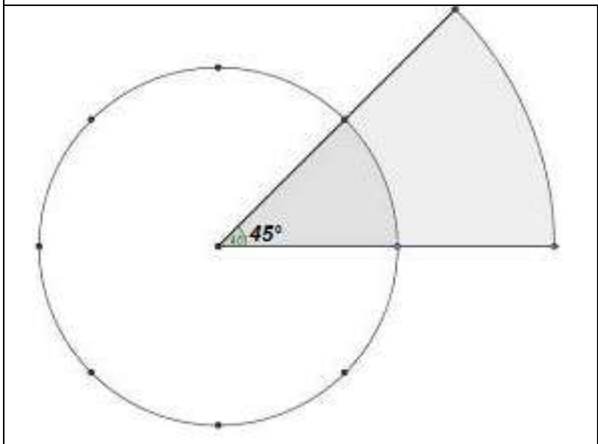
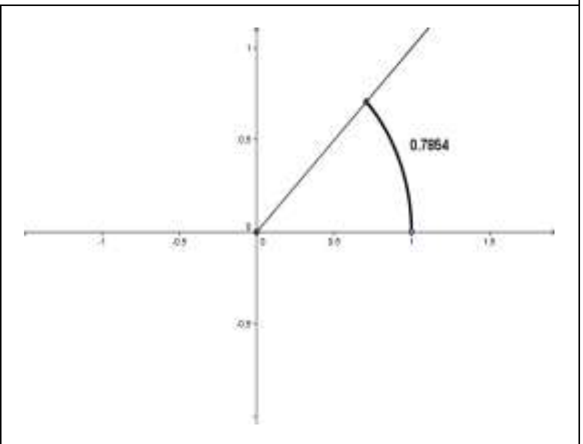
Cómo resolver ecuaciones trigonométricas.

Tarea 10. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas para valores no negativos de la incógnita hasta 360°.

1. $2Sen\alpha - 1 = 0$	Solución: $\alpha = 30°, 150°$
2. $2Sen^2\theta - 5Sen\theta + 2 = 0$	Solución: $\theta = 30°, 150°$
3. $2Cos^2\alpha = Cos\alpha$	Solución: $\alpha_1 = 90°, 270°\ y\ \alpha_2 = 60°, 300°$
4. $2Sena - \sqrt{3} = 0$	Solución: $a = 60°, 120°$
5. $2Cos^2x - Cosx - 1 = 0$	Solución: $x = 0°, 120°, 240, 360$

9. Graficas de las Funciones Trigonométricas seno y coseno.

Considerando que este tipo de funciones son periódicas o cíclicas, lo *"periódico"* en sus sentidos técnico y científico, es decir, matemático, está presente en la vida cotidiana de cualquier persona en múltiples y variadas formas o necesidades, al punto de que a nuestro tiempo se le ha dado el nombre de la "era de la información" gracias, precisamente, al desarrollo de instrumentos tecnológicos en los que lo "cíclico" o "periódico" juegan un papel de primera importancia: ¿sería posible la TV sin haber caracterizado la señal de audio y video como una *onda* electromagnética?

Medida angular en radianes.	
Los babilonios medían los ángulos en grados, esto es, dividían la circunferencia en 360°, cada grado en minutos y cada minuto en segundos. Sin embargo, en la época moderna esta medición angular resultó ser poco eficiente por lo que los matemáticos modernos cambiaron la forma de medir ángulos llevando esta medida a la recta real.	
	

Babilonios: medición angular (grados).	Época moderna: medición angular (radianes).

Para llevar a cabo tal transformación, los matemáticos cambiaron la idea babilonia de medir "aberturas" por la de medir longitudes, en particular, para cada "abertura" se le hace corresponder la longitud del segmento circular que genera en una circunferencia de radio 1. A esta longitud se le llama la medida del ángulo ("abertura") en radianes.

A. Primero vamos a convertir grados a radianes y viceversa.

Visita el siguiente código QR (convertir grados a radianes y viceversa), con la finalidad de que puedas realizar la hoja de trabajo 4. Saca una copia con la información relativa al tema o cópiala en tu cuaderno ya que ésta la vas a usar en la siguiente actividad que realizaras a lo largo de esta secuencia didáctica.

Convertir grados a radianes y viceversa.

1. Ahora bien, completa la siguiente tabla.

Tabla 4. Relación entre grados y radianes

ángulo medido en grados:	**ángulo medido en radianes:**
240°	
45º	
	$\frac{3\pi}{4}$
	$\frac{\pi}{4}$
360º	

2. Entra a internet e investiga la definición de radian:

4. Usa los resultados de la tabla 4 para que determines la expresión algebraica que relaciona los grados con la medida del ángulo en radianes. Escribe tu respuesta en el siguiente renglón

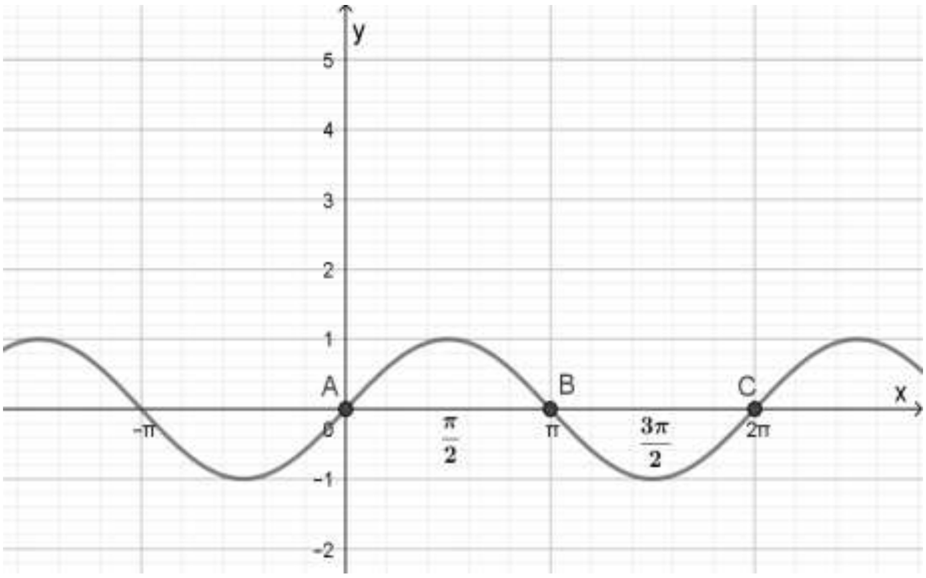
5. Ahora, determina la expresión algebraica para cambiar el ángulo de grados a radianes. Escribe la respuesta en el siguiente renglón.

Actividad extra-clase.

1. Investiga las definiciones de las *funciones* (**no)** de la *razones*) trigonométricas y haz una breve descripción de las mismas.

Propiedades de las funciones seno, coseno y tangente.

I. Propiedades de la función : $y = f(x)$ por lo tanto $y = Sen(x)$.



Gráfica de la función Seno.
Visita el código QR, para que puedas realizar esta hoja de trabajo.

Figura 3. Función Seno.

1. ¿Qué es una función periódica?

2. ¿Para qué valores de *"x"* existe imagen (rango)?

3. ¿Es continua esta función?

4. ¿Es simétrica su gráfica?

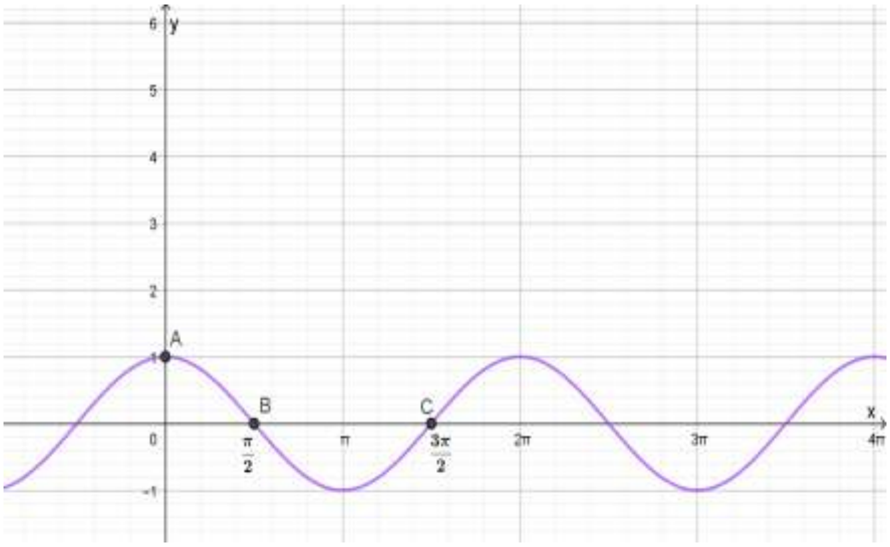
5. ¿Se repite? ¿Cuál es su período?

6. ¿En qué puntos de la figura anterior corta la función a eje *"x"*? ¿y al eje *"y"*?

7. ¿De acuerdo a la figura mostrada arriba, en qué intervalos la función es positiva? ¿y negativa?

8. Calcula dónde se alcanzan los valores máximos y mínimos de la figura

II. ***Propiedades de la función :*** $y = f(x)$ por lo tanto $y = Cos(x)$.



Gráfica de la función Coseno.

Visita el código QR, para que puedas entender la gráfica de esta función.

Figura 4. Función Coseno.

1. ¿Es continua esta función?

2. ¿Es simétrica su gráfica?

3. ¿Se repite? ¿Cuál es su período?

4. ¿En qué puntos de la figura 4 corta la función al eje x? ¿y al eje y?

5. ¿En qué intervalos la función de la figura 4 es positiva? ¿y negativa?

6. Calcula dónde se alcanzan los valores máximos y mínimos de la figura 4.

Tarea 11. Obtenga la gráfica de las siguientes funciones trigonométricas de [0°,360°].

$y = 2Sen(4x)$	$y = 3Cos(2x)$	$y = 5Cos(3x)$	$y = 4Sen(x)$

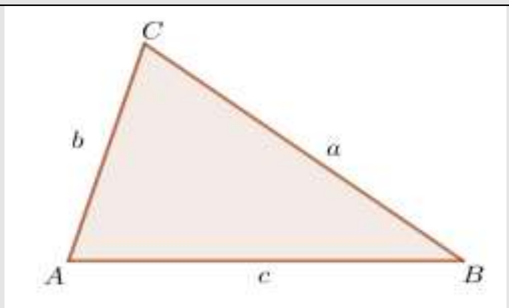
10. Triángulos Oblicuángulos.

Los triángulos que no son rectángulos, se llaman acutángulos (sus tres ángulos son agudos) u oblicuángulos (un ángulo es obtuso), y se resuelven (es decir se calculas los lados y ángulos faltantes), utilizando la ley de seno y/o cosenos, para poder aplicar estas leyes necesitamos al menos tres datos como se muestra en el siguiente código QR.

Actividad 1. Visita el código QR de la derecha, para conocer acerca de los triángulos oblicuángulos, los cuales se resuelven utilizando la ley de senos y cosenos, saca una copia de la información relativa al tema y cópiala en tu cuaderno.

Solución de Triángulos oblicuángulos.

Tarea 12. Resuelve cada uno de los siguientes triángulos oblicuángulos ABC.



Ley de cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * CosA$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * CosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * CosC$$

Ley de senos

$$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC}$$

1. $c = 25, \quad A = 35°, \quad B = 68°$	Solución: $a = 15, \quad b = 24, \quad C = 77°$
2. $c = 62.5, \quad A = 112°20', \quad C = 42°10'$	Solución: $b = 29.1, \quad c = 45.4, \quad B = 25°30'$
3. $c = 628, \quad b = 480, \quad C = 55°10'$	Solución: $B = 38°50', \quad A = 80°, \quad a = 764$
4. $a = 525, \quad c = 421, \quad A = 130°50'$	Solución: $C = 37°21', \quad B = 11°50', \quad B = 25°30'$
5. $a = 322, \quad c = 212, \quad B = 110°50'$	Solución: $A = 42°40', \quad C = 26°30', \quad b = 44$

Evaluación de la unidad 3. Funciones trigonométrica.

Nombre: ____. Boleta: _________.

Instrucciones.

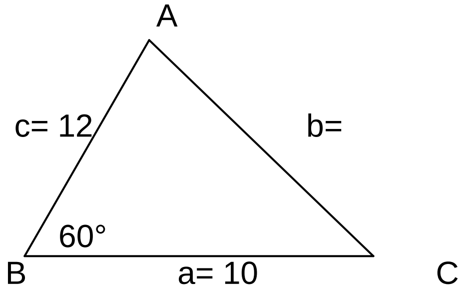
- Escribe todas las operaciones de forma ordenada y clara en la hoja. Subraya tus resultados.
- No se permite el uso de formularios.

1. Desde lo alto de un edificio con vista al mar, un observador avista una lancha que navega directamente hacia el edificio. Si el observador está a 35m snm (sobre el nivel del mar) y el ángulo de depresión de la lancha cambia de 25° a 35^0 durante el periodo de observación, calcula la distancia que recorre la lancha.

2. Calcular el valor de todas las funciones trigonométricas a partir de: $sen\theta = -\frac{1}{2}$

3. Obtén la gráfica de la función trigonométrica $y = 2\cos 3\theta$.

4. Determine los lados y ángulos faltantes en el siguiente triángulo.



5. Resuelve la ecuación $2Sen^2\alpha - 5Sen\alpha + 2 = 0$ para todos los valores del ángulo entre: [0 , 360°].

6. Verificar la siguiente identidad trigonométrica: $\cot x + \frac{senx}{(1+\cos x)} = \csc x$