

## Resolver los siguientes ejercicios y realizar su desarrollo ordenado

I.- Calcular los límites de las siguientes funciones:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

II.- Derivar las siguientes funciones por regla de los cuatro pasos o regla de definición:

a)  $y = x^2 - 3x - 7$

b)  $y = \frac{3}{x}$

III.- Derivar las siguientes funciones algebraicas aplicando la fórmula correspondiente:

a)  $y = (3 - 2x)^3$

b)  $s(t) = \frac{2t^2-9}{2t^2+9}$

IV.- Obtener la derivada correspondiente de cada ejercicio:

a)  $y = (ax + b)^4$       *tercera derivada*

b)  $y = \frac{4x-1}{5x+3}$       *segunda derivada*

V.- Derivar las siguientes funciones implícitas:

a)  $x - 5y^2 = 3y$

b)  $x^2 - y^2 = 5y$

VI.- Derivar las siguientes funciones trigonométricas directas:

a)  $y = \sec \frac{2-x}{3}$

b)  $y = 3\text{sen}^2 x - 4\text{cos}^2 x$

VII.- Derivar las siguientes funciones trigonométricas inversas:

a)  $y = \arctan 3x^3$

b)  $y = x^2 \arcsen \sqrt{x}$

VIII.- Derivar las siguientes funciones logarítmicas:

a)  $y = \ln(1 - 3x^3)$

b)  $y = \log_2 \text{sen} x$

IX.- Derivar las siguientes funciones exponenciales:

a)  $y = e^{\text{sen} x}$

b)  $y = x^{\text{cos} x}$

X.- Calcular los máximos y mínimos de la siguiente función:

a)  $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

## Fórmulas de funciones trigonométricas inversas

$$1) \quad \text{Si } y = \arcsen x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Si } y = \arcsenu \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } y = \arcsen 3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(3x^2)^2}} (6x) = \frac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}$$

$$\text{Siendo } u = 3x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x$$

$$2) \quad \text{Si } y = \arccos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Si } y = \arccosu \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } y = \arccos \sqrt{2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{2x})^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}} \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2x} \sqrt{1-2x}}$$

$$\text{Siendo } u = \sqrt{2x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2x}} (2) = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$3) \quad \text{Si } y = \arctan x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{Si } y = \arctanu \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } y = \arctan \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \left(\frac{-2}{(1+x)^2}\right) = -\frac{2}{2+2x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{Siendo } u = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{(1+x)(-1)-(1-x)(1)}{(1+x)^2} = \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$4) \quad \text{Si } y = \text{arccot} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{Si } y = \text{arccotu} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } y = \text{arccot}(x^2 - 3) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+(x^2-3)^2} (2x) = -\frac{2x}{1+(x^2-3)^2}$$

$$\text{Siendo } u = (x^2 - 3) \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$5) \text{ Si } y = \operatorname{arcsec} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{Si } y = \operatorname{arcsec} u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } y = \operatorname{arcsec}\sqrt{x^2-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{(\sqrt{x^2-1})^2-1}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} (2x) \right) = \frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}$$

$$\text{Siendo } u = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$6) \text{ Si } y = \operatorname{arccsc} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{Si } y = \operatorname{arccsc} u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } y = \operatorname{arccsc}\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{(\sqrt{x})^2-1}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = -\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$$

$$\text{Siendo } u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

## Fórmulas de funciones exponenciales y logarítmicas

Función exponencial:

$$\text{Si } y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\text{Si } y = e^u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } y = e^{\sin 2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\sin 2x} (\cos 2x)(2) = 2 \cos 2x e^{\sin 2x}$$

$$\text{Siendo } u = \sin 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos 2x(2) = 2 \cos 2x$$

Función exponencial:

$$\text{Si } y = a^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^x \ln a$$

$$\text{Si } y = a^u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } y = 2^{3x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2^{3x} \ln 2(3) = 3(2^{3x}) \ln 2$$

$$\text{Siendo } u = 3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3$$

Función Logarítmica

$$\text{Si } y = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\text{Si } y = \ln u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } y = \ln \left( \frac{x}{1+x} \right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{x}{1+x}} \left( \frac{(1+x)(1) - (x)(1)}{(1+x)^2} \right) = \frac{(1+x)}{x} \left( \frac{1}{(1+x)^2} \right) = \frac{1}{x(1+x)}$$

$$\text{Siendo } u = \frac{x}{1+x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\text{Si } y = \log_a x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\ln a}{x}$$

$$\text{Si } y = \log_a u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\ln a}{u} \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } y = \log_3 4x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\ln 3}{4x^2} (8x) = \frac{2 \ln 3}{x}$$

$$\text{Siendo } u = 4x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 8x$$

Función exponencial general

$$\text{Si } y = u^v \text{ siendo } u \text{ y } v \text{ funciones derivables de } x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u^v \left[ \frac{v}{u} \frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx} \right]$$

$$\text{Ejemplo Sea } y = x^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^x [1 + \ln x]$$

## Fórmulas de funciones trigonométricas directas y ejemplos

1) Sea la función  $y = \text{sen } x$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = \text{cos } x$

Sea la función  $y = \text{sen } u$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = \text{cos } u \frac{du}{dx}$

Ejemplo:

Sea  $y = \text{sen } 3x^2 \Rightarrow$  su derivada es:  $\frac{dy}{dx} = \text{cos } 3x^2 (6x)$

Cómo ves  $u = 3x^2 \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{du}{dx} = 6x$

2) Sea la función  $y = \text{cos } x \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = -\text{sen } x$

Sea la función  $y = \text{cos } u \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = -\text{sen } u \frac{du}{dx}$

Ejemplo:

Sea  $y = \text{cos } \frac{x^2}{2} \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = -\text{sen } \frac{x^2}{2} (x)$

Como ves  $u = \frac{x^2}{2} \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(2x) = x$

3) Sea la función  $y = \text{tan } x \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = \text{sec}^2 x$

Sea la función  $y = \text{tan } u \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = \text{tan } u \frac{du}{dx}$

Ejemplo:

Sea  $y = \text{tan } \sqrt{3x} \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = \text{sec}^2 \sqrt{3x} \left(\frac{3}{2}\right) (3x)^{-\frac{1}{2}}$

Como ves  $u = \sqrt{3x}$  que se traduce en  $(3x)^{\frac{1}{2}}$  su derivada es  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} (3x)^{-\frac{1}{2}} (3) = \frac{3}{2} (3x)^{-\frac{1}{2}}$

4) Sea la función  $y = \text{cot } x \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = -\text{csc}^2 x$

Sea la función  $y = \text{cot } u \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = -\text{csc}^2 u \frac{du}{dx}$

Ejemplo:

Sea  $y = \text{cot } \frac{1}{x} \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = -\text{csc}^2 \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

Como ves  $u = \frac{1}{x} \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

5) Sea la función  $y = \sec x \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = \sec x \tan x$

Sea la función  $y = \sec u \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$

Sea  $y = \sec 2x^3 \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = \sec 2x^3 \tan 2x^3 (6x^2)$

Como ves  $u = 2x^3 \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{du}{dx} = 6x^2$

6) Sea la función  $y = \csc x \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = -\csc x \cot x$

Sea la función  $y = \csc u \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$

Ejemplo:

Sea  $y = \csc \frac{x^3}{3} \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{dy}{dx} = -\csc \frac{x^3}{3} \cot \frac{x^3}{3} (x^2)$

Como ves  $u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow$  su derivada es  $\frac{du}{dx} = \frac{3x^2}{3} = x^2$