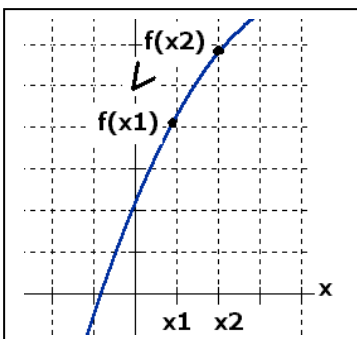


CAPÍTULO 12 FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

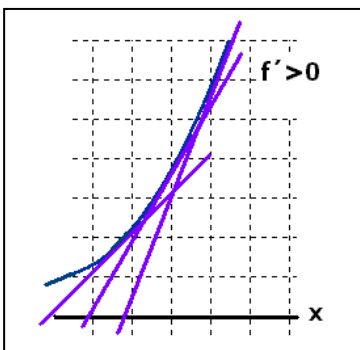
FUNCIÓN CRECIENTE

Diremos que una función es creciente cuando a medida que crece el valor de la variable independiente crece el valor de la función.



La función es creciente si para todo $x_1 < x_2$ se tiene :
 $f(x_1) < f(x_2)$

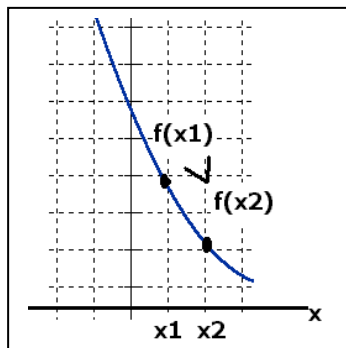
Siempre trabajaremos con funciones derivables, por lo que para analizar en donde una función es creciente estudiaremos su derivada f' .



Cuando una función es creciente todas las rectas tangentes forman ángulos agudos y sus pendientes m son positivas, es decir $m = f' > 0$

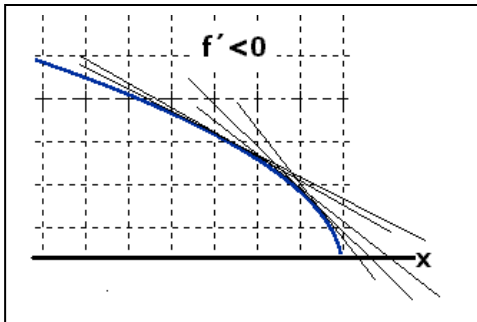
FUNCIÓN DECRECIENTE

Diremos que una función es decreciente cuando a medida que el valor de la variable independiente aumenta el valor de la función disminuye.



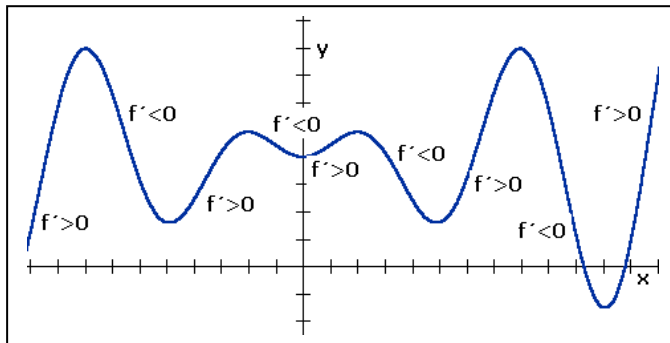
La función es decreciente si para todo $x_1 < x_2$ se tiene:
 $f(x_1) > f(x_2)$

En términos de derivada; Diremos que una función f es decreciente cuando su derivada es negativa , es decir una función es decreciente cuando $f' < 0$.



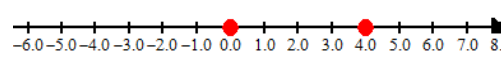
Cuando una función es decreciente todas las rectas tangentes forman ángulos obtusos y sus pendientes m son negativas, es decir $m=f' < 0$.

En la siguiente figura se representa todo lo anterior.



Ejemplo: Hallar los intervalos en donde la función $f(x)=x^5 - 5x^4$ es creciente y en donde es decreciente.

Solución: Hallemos f' : $f'(x)= 5x^4 -20x^3$
 Igualemos a cero la derivada: $f'(x)= 5x^4 -20x^3 =0$
 Resolvamos esta ecuación: $5x^3(x-4) =0$

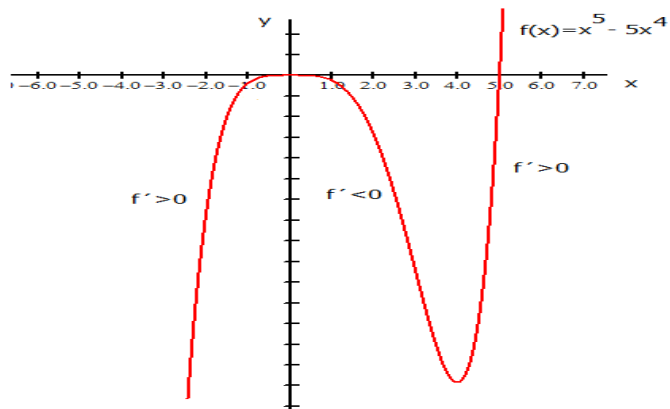


Así tenemos: $5x^3=0$, $x-4=0$, de donde $x=0$, $x=4$

Para saber en que intervalos la derivada es positiva o negativa, es decir la función creciente o decreciente tomemos valores de prueba.

INTERVALO	K	$f'(K)$	Signo de f'	Comportamiento de f
$(-\infty, 0)$	-1	$f'(-1)=25$	+	CRECIENTE
$(0, 4)$	3	$f'(3)=-135$	-	DECRECIENTE
$(4, +\infty)$	5	$f'(5)=625$	+	CRECIENTE

Veamos esto en la siguiente gráfica.



Ejercicio

Hallar los intervalos en donde las siguientes funciones son crecientes y en los que son decrecientes.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$



b) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$

c) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$

Sol. Creciente $(-\infty, -1.2)$, $(0.5, +\infty)$ Decreciente $(-1.2, 0.5)$

CAPITULO13 CRITERIO DE LA PRIMER DERIVADA PARA MÁXIMOS Y MÍNIMOS

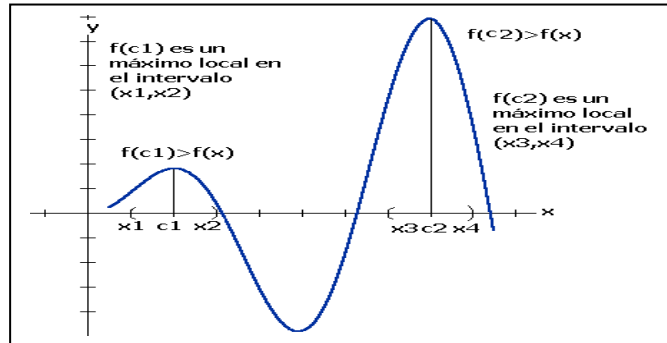
Ejemplo: Supongamos que tenemos una tela de alambre de 200m de longitud y queremos enjear un terreno rectangular y que utilizaremos la pared de la casa. Obtenga la fórmula que determine el área enrejada, gráfíquela e indique que medidas hacen que se tenga el mayor terreno enrejado.

Ejemplo: La suma de dos números es 60, Obtenga estos números si el producto debe ser máximo.

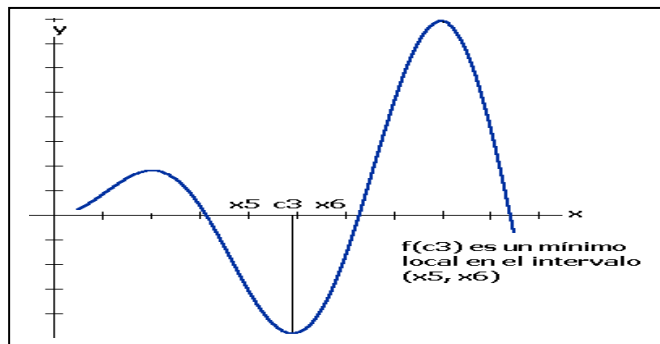
Ejemplo: Supongamos que tenemos una tela de alambre de 160m de longitud y queremos enrejar un terreno rectangular y que utilizaremos el borde de un río. Obtenga la fórmula que determine el área enrejada, gráfiquela e indique que medidas hacen que se tenga el mayor terreno enrejado.

MÁXIMOS LOCAL Y MINIMOS LOCAL

MÁXIMOS LOCAL: Un máximo local de una función es el valor mayor que puede alcanzar la función en cierta región, podemos decir que $f(c)$ es un máximo local si existe un intervalo abierto que contiene a c de tal forma que $f(c) > f(x)$ para todo x en el intervalo.



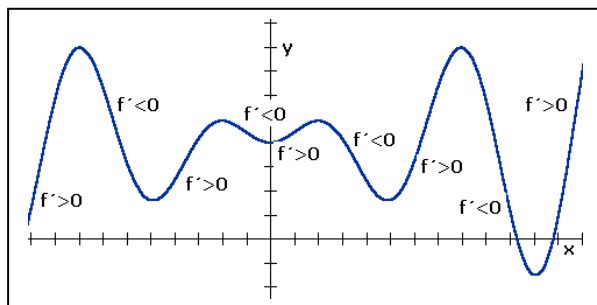
MINIMOS LOCAL: Un mínimo local de una función es el menor valor que puede tomar una función en cierta región, podemos decir que $f(c)$ es un mínimo local si existe un intervalo abierto de tal forma que $f(c) < f(x)$ para todo x en el intervalo.



Nuestro objetivo es determinar máximos y mínimos locales y desde ahora los llamaremos simplemente máximos y mínimos.

Observemos la siguiente gráfica.

- 1.- Si la función es creciente y luego decreciente se alcanza un máximo.
- 2.- Si la función es decreciente y luego creciente se alcanza un mínimo.
- 3.- En los puntos máximos y mínimos las rectas tangentes son horizontales.



Definición: Los puntos en donde la derivada es cero o se hace infinita, se llaman puntos críticos, las abscisas correspondientes se llaman números críticos y la ordenada del punto crítico valor crítico.

Con los elementos que estamos desarrollando tenemos el criterio de la primer derivada para hallar valores máximos y mínimos.

CRITERIO DE LA PRIMER DERIVADA PARA HALLAR LOS VALORES MÁXIMO Y MÍNIMO

- 1.- Busquemos los números críticos
- 2.- Hallar los intervalos en donde la función es creciente y en donde es decreciente
Si la función es creciente y luego decreciente, entonces se alcanza un máximo.

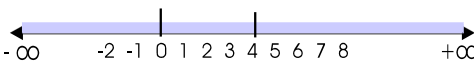
Si la función es decreciente y luego creciente, entonces se alcanza un mínimo.

Ejemplo: Hallar los valores máximos y mínimos de la función $f(x)=x^5-5x^4$.

Solución: Hallemos los números críticos. Para esto resolvamos la ecuación $f'(x)=0$

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 0$$

podemos factorizar: $x^3(5x-20)=0$, así tenemos las soluciones: $x^3=0$, $5x-20=0$
 Los números críticos son: $x=0$, $x=20/5=4$



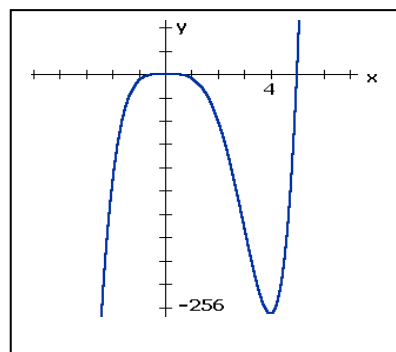
La figura muestra los intervalos a estudiar: $-\infty$ -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 $+\infty$
 Hallemos los intervalos donde la función es creciente y en donde es decreciente:

Intervalo	valor de prueba	derivada	signo de la derivada	función M	comportamiento de M
$(-\infty, 0)$	-1	$\frac{df}{dx} = 5(-1)^4 - 20(-1)^3 = 25$	+		creciente
$(0, 4)$	2	$\frac{df}{dx} = 5(2)^4 - 20(2)^3 = -80$	-		decreciente
$(4, \infty)$	5	$\frac{df}{dx} = 5(5)^4 - 20(5)^3 = 625$	+		creciente

Así en $x=0$ se tiene un valor máximo, este es: $f(0)=(0)^5-5(0)^4=0$

Así en $x=4$ se tiene un valor mínimo, este es: $f(4)=(4)^5-5(4)^4=-256$

Representemos esta información en la gráfica:



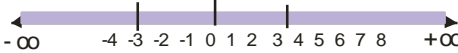
Ejemplo: Hallar los valores máximos y mínimos de la función $f(x)=x^4/4 - 9x^2/2$

Solución: Hallemos los números críticos. Para esto resolvamos la ecuación $f'(x)=0$

$$f'(x) = 4x^3/4 - 9(2x)/2$$

$$f'(x) = x^3 - 9x = 0$$

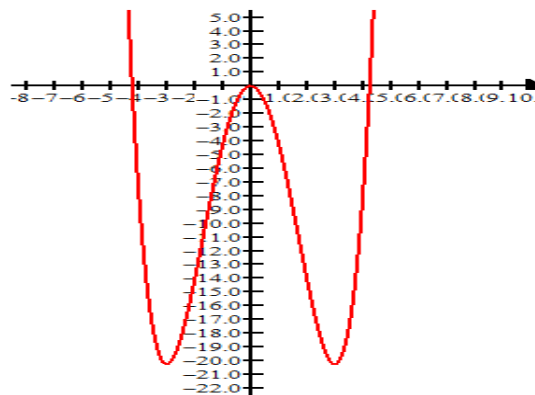
Podemos factorizar: $x(x^2-9)=x(x-3)(x+3)$, así tenemos las soluciones: $x=0$, $x=3$, $x=-3$
 Los números críticos son: $x=0$, $x=3$, $x=-3$



La figura muestra los intervalos a estudiar:

Hallemos los intervalos donde la función es creciente y en donde es decreciente:

Intervalo	valor de prueba	derivada	signo de la derivada	función M	comportamiento de M
$(-\infty, -3)$	-4	$\frac{df}{dx}(-4) = -28$	-		decreciente
$(-3, 0)$	-1	$\frac{df}{dx}(-1) = 8$	+		creciente
$(0, 3)$	1	$\frac{df}{dx}(2) = -8$	-		decreciente
$(3, \infty)$	4	$\frac{df}{dx}(4) = 28$	+		creciente



Así en $x=-3$ se tiene un valor mínimo, este es: $f(-3)=-20.2$

Así en $x=0$ se tiene un valor máximo, este es: $f(0)=0$

Así en $x=3$ se tiene un valor mínimo, este es: $f(3)=-20.2$

Ejemplo: Hallar los valores máximos y mínimos de la función $f(x)=x^{2/3}(8-x)$

Solución: Hallemos los números críticos.

$$\begin{aligned} \text{Hallemos } f'(x): \quad f'(x) &= x^{2/3}(8-x)' + (8-x)(x^{2/3})' \\ &= x^{2/3}(-1) + (8-x)(2x^{-1/3}/3) \\ &= -x^{2/3} + \frac{16-2x}{3x^{1/3}} = \frac{-3x^{3/3} + 16 - 2x}{3x^{1/3}} = \frac{16-5x}{3x^{1/3}} \end{aligned}$$

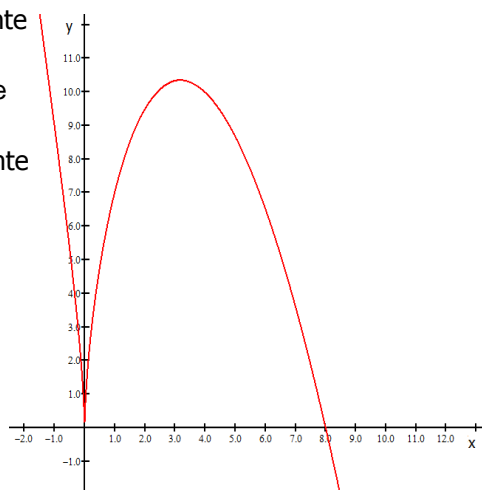
Entonces $x=0$ es un número crítico.

Tomando $f'(x)=0$, tenemos que $16-5x=0$, entonces $x=16/5$ es otro número crítico.

Hallemos los intervalos donde la función es creciente y en donde es decreciente:

Intervalo	valor de prueba	derivada	signo de la derivada	función M	comportamiento de M
$(-\infty, 0)$	-1	$\frac{df}{dx}(-1) = -7$	-		decreciente
$(0, 16/5)$	1	$\frac{df}{dx}(1) = 3.6$	+		creciente
$(16/5, \infty)$	4	$\frac{df}{dx}(4) = -2.6$	-		decreciente

Así en $x=0$ se tiene un valor mínimo, este es: $f(0)=0$
 Así en $x=16/5$ se tiene un valor máximo, este es: $f(16/5)=10.42$
 Representemos esta información en la gráfica



Ejercicio

Utilizando el criterio de la primera derivada

1.- Hallar los valores máximos y mínimos de la función $y=-2x^2 +4x+5$

2.- Hallar los valores máximos y mínimos de la función $y= 2x^3+3 x^2 -12x$

3.- Hallar los valores máximos y mínimos de la función $y = x^4 - 7x^2$

4.- Hallar los valores máximos y mínimos de la función $y = \frac{x^3}{4} - 3x$

5.- Hallar los valores máximos y mínimos de la función $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$

6.- Hallar los valores máximos y mínimos de la función $f(x) = x^2 + 8x + 10$

7.- Hallar los valores máximos y mínimos de la función $y = (x-1) \sqrt[3]{x^2}$

APLICACIONES DE MAXIMOS Y MINIMOS

Ejemplo1 LOS NÚMEROS: Un número, excede a su cuadrado en una cantidad máxima. Obtenga dicho número.

Solución: Tomemos x el número que buscamos.
 Entonces x^2 es su cuadrado
 Así debemos analizar: $M = x - x^2$

Apliquemos el criterio de la primera derivada: $\frac{dM}{dx} = 1 - 2x$

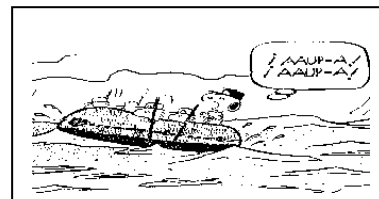
Busquemos los valores críticos, igualando a cero tenemos: $1 - 2x = 0$, así el valor crítico es $x = 1/2$
 Veamos que en este valor $x = 1/2$, M tiene un máximo.

Intervalo	valor de prueba	derivada	signo de la derivada	función M
$(-\infty, 1/2)$	0	$\frac{dM}{dx} = 1 - 2(0) = 1$	+	creciente
$(1/2, \infty)$	1	$\frac{dM}{dx} = 1 - 2(1) = -1$	-	decreciente

Así en $x = 1/2$ se tiene un valor máximo, tenemos $x^2 = 1/4$ y así: $M = x - x^2 = 1/2 - 1/4 = 1/4$

Ejercicio

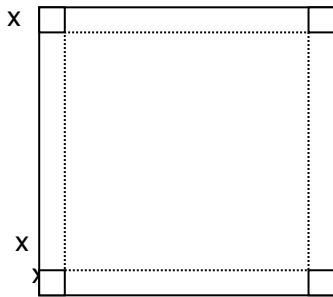
1.- Hallar dos números x , y cuya suma sea 80 y cuyo producto sea el máximo posible.



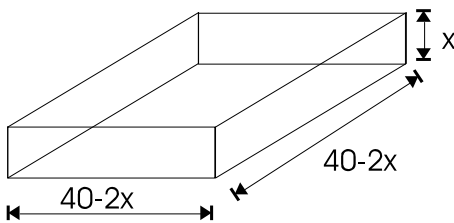
2.- Hallar dos números x , y cuya suma sea 30 y además el producto xy^2 sea máximo.

APLICACIONES DE MÁXIMOS Y MINIMOS

Ejemplo 2. De una pieza de cartón se va a formar una caja sin tapa, cortando un cuadrado en cada una de las esquinas y doblando los bordes. Si el cartón mide 40 cm, por lado, encuentre las dimensiones de la caja que darán lugar al volumen máximo. ¿Qué valor tiene dicho volumen?



Calculemos el volumen:
 $V = \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{altura}$
 $V = (40-2x)(40-2x)x$
 $V = (40-2x)^2 x$
 Desarrollando:
 $V = (1600 - 160x + 4x^2)x$
 Así tenemos:
 $V = 1600x - 160x^2 + 4x^3$



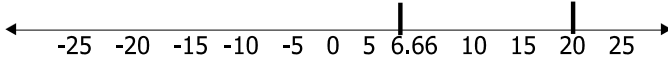
Para obtener las dimensiones de la caja de máximo volumen, apliquemos el criterio de la primer derivada:
 $V' = 1600 - 320x + 12x^2$
 Tomemos $V' = 0$
 $V' = 1600 - 320x + 12x^2 = 0$
 Resolvamos esta ecuación utilizando la formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Así: $x = \frac{-(-320) \pm \sqrt{(-320)^2 - 4(1600)(12)}}{2(12)} = \frac{320 \pm \sqrt{256000}}{24} = \frac{320 \pm 160}{24}$

así tenemos los números críticos: : $x_1 = \frac{320+160}{24} = 20, x_2 = \frac{320-160}{24} = \frac{20}{3} \approx 6.66$

Formemos los intervalos de prueba para buscar el máximo y el mínimo



Los intervalos son $(-\infty, 6.66), (6.66, 20), (20, +\infty)$

Analicemos estos intervalos:

INTERVALOS	VALOR k	V'(k)	SIGNO DE V'	COMPORTAMIENTO DE V
$(-\infty, 6.66)$	0	$V'(0)=1600$	+	Creciente
$(6.66, 20)$	7	$V'(7)=-52$	-	Decreciente
$(20, +\infty)$	21	$V'(21)=172$	+	Creciente

Por lo tanto en $x=6.66$ tenemos un máximo. Las dimensiones de la caja son:

Largo = $40-2x=40-2(6.66)=26.66\text{cm}$

Ancho = $40-2x=40-2(6.66)=26.66\text{cm}$

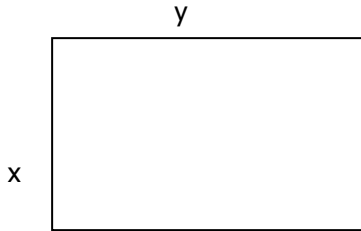
Altura = $x = 6.66\text{cm}$

Volumen = 3013.69cm^3

¿Qué sucede si se recortan cuadrillos de 20cm en cada esquina?

Ejemplo 3. Un rectángulo tiene 120 m. De perímetro. ¿Qué largo y qué ancho dan el área máxima?

Solución: Representemos la situación con un dibujo

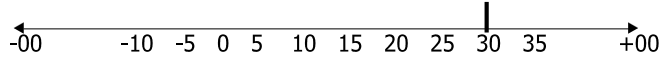


El Área del rectángulo es $A=xy\dots (A)$
 Es una función de dos variables
 Calculemos el perímetro:
 $120=2x+2y \dots(B)$
 Despejemos y:
 $y= \frac{120-2x}{2}$
 o sea: $y = 60 - x \dots(C)$

Sustituamos $y=60-x$ en la ecuación (A), tenemos: $A=xy=x(60-x)=60x-x^2$, Es decir $A=60x-x^2$
 Para obtener las dimensiones del rectángulo de máxima área, apliquemos el criterio de la primer derivada:
 $A' = 60 - 2x$

$A' = 60 - 2x = 0$, despejando a x: $x = \frac{60}{2} = 30$, así el único número crítico es $x=30$

Formemos los intervalos de prueba para buscar el máximo o el mínimo



Los intervalos son $(-\infty, 30)$, $(30, +\infty)$

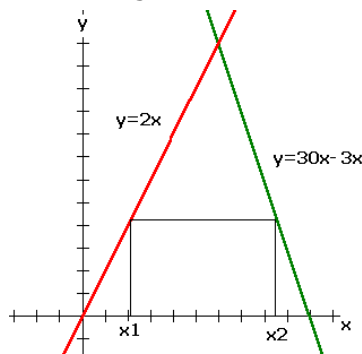
Comprobemos que en $x=30$ hay un máximo

INTERVALOS	VALOR k	V'(k)	SIGNO DE V'	COMPORTAMIENTO DE V
$(-\infty, 30)$	0	$A'(0)=60$	+	Creciente
$(30, +\infty)$	31	$A'(31)=-2$	-	Decreciente

Por lo tanto en $x=30$ hay un máximo. Calculemos y, utilicemos la ecuación (C) : $y=60-x=60-30=30$. Con estas condiciones tenemos que el área del rectángulo será máxima cuando los lados sean iguales, o sea que es un cuadrado. En este caso el Área será: $A= (30)(30)=900\text{m}^2$.

Ejemplo 4. Dos vértices de un rectángulo están sobre el eje x. Los otros dos están sobre las rectas cuyas ecuaciones son $y=2x$, $3x+y=30$. ¿Para que valores de " y " será máxima el área del rectángulo?

Solución: La gráfica muestra la situación.



El Área del rectángulo es $A=(x_2-x_1)y\dots (A)$
 Utilizando $y=2x$, tenemos $x_1=y/2 \dots(B)$
 Utilizando $y=30-3x$, tenemos: $y_1=(30-y)/3 \dots(C)$
 Sustituyendo (B) y (C) en (A), tenemos:
 $A = \left(\frac{30-y}{3} - \frac{y}{2}\right)y = \left(\frac{30}{3} - \frac{y}{3} - \frac{y}{2}\right)y = \left(10 - \frac{5}{6}y\right)y$
 Es decir:
 $A = 10y - \frac{5}{6}y^2$

en $y=6$ hay un máximo pues:

Para obtener las dimensiones del rectángulo de área máxima, apliquemos el criterio de la primer derivada:
 $A' = 10 - \frac{5}{6}(2y) = 10 - \frac{5}{3}y$
 Tomemos $A' = 0$
 $V' = 10 - \frac{5}{3}y = 0$

INTERVALOS	VALOR K	A'(k)	SIGNO DE A'	COMPORTAMIENTO DE A
$(-\infty, 6)$	0	$A'(0)=10$	+	Creciente
$(6, +\infty)$	7	$A'(7)=-5/6$	-	Decreciente

Calculemos el área sustituyamos $y=6$ en: $A = 10y - \frac{5}{6}y^2$.

Tenemos: $A = 10(6) - \frac{5}{6}(6)^2 = 60 - 30 = 30$, Así $A=30u^2$

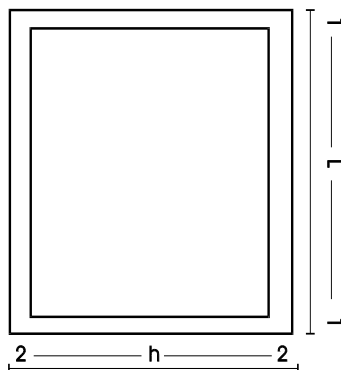
Ejemplo 5 EL POSTER. Una pagina impresa va a tener dos márgenes de 2 pulgadas en los lados y de 1 pulgada en la parte superior e inferior. El área impresa es de 32 pulgadas cuadradas. Determine las dimensiones de la página de manera que utilice la menor cantidad de papel.

Solución:



Consideremos el Área de impresión:
 Tomemos: Área impresa $A=L*h=32\dots (1)$
 Donde: L=largo ,h=ancho
 De (1) despejamos L: $L = \frac{32}{h}$

Por otro lado la pagina tiene una área total: $A_t = (L+2)(h+4)\dots(2)$
 Sustituimos L en (2), tenemos: $A_t = (L + 2)(h + 4) = (\frac{32}{h} + 2)(h + 4)$
 Así: $A_t = 32 + \frac{128}{h} + 2h + 8$



Busquemos los números críticos:
 Hallemos la derivada: $A'_t = -\frac{128}{h^2} + 2$
 Haciendo operaciones: $A'_t = \frac{-128 + 2h^2}{h^2}$
 Así los números críticos son: $h=0$ y también cuando $A'_t=0$, es decir:
 $A'_t = \frac{-128 + 2h^2}{h^2} = 0$, Resolviendo tenemos $-128+2h^2=0$
 Despejando h: $h = \sqrt{\frac{128}{2}} = \sqrt{64} = \pm 8$
 Por lo que los números críticos son: 0,-8,8

Consideremos sólo $h=8$, pues 0 y -8 no tienen sentido. Apliquemos el criterio de la primera derivada:

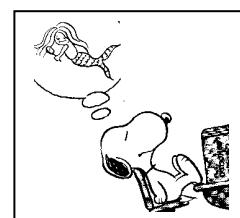
Intervalo	Número de prueba k	A't	Signo de A't	At
(0,8)	1	$\frac{-128+2(1)^2}{(1)^2} = -126$	-	Decreciente
(8, +∞)	9	$\frac{-128+2(9)^2}{(9)^2} = \frac{34}{81}$	+	Creciente

Entonces en $h=8$ hay un mínimo para A_t , calculemos L : $L = \frac{32}{L} = \frac{32}{8} = 4$.

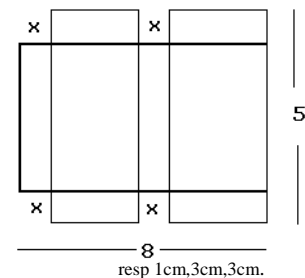
Así las dimensiones de la página son: $Largo=L+2= 4+2=6$, $ancho=h+4=8+4=12$

PROYECTO

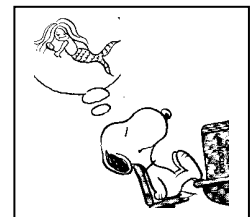
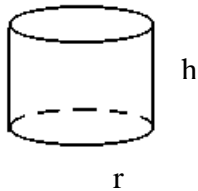
1.-De una pieza de cartón se va a formar una caja sin tapa, cortando un cuadrado en cada una de las esquinas y doblando los bordes. Si el cartón mide 30 cm, por lado, encuentre las dimensiones de la caja que darán lugar al volumen máximo. ¿Qué valor tiene dicho volumen?



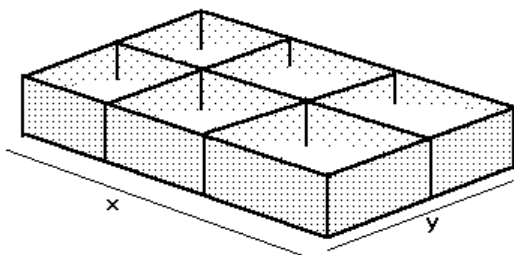
2.-Se desea construir una caja cerrada a partir de una pieza de cartón de 5cm por 8cm., la caja se formara cortando cuadrados del mismo tamaño y luego se doblan los bordes, como se muestra en la figura. Determinar las dimensiones de la caja que tendrá el máximo volumen.



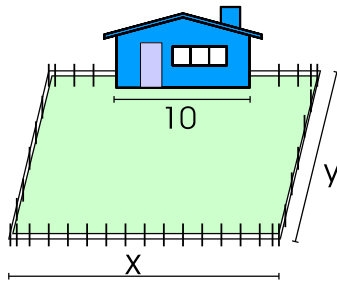
3.- Una lata de estaño con volumen de 16π pulgadas³, va a tener la forma de un cilindro circular recto, determinar la altura y el radio de dicha lata si se va a utilizar la mínima cantidad de material en su manufactura.



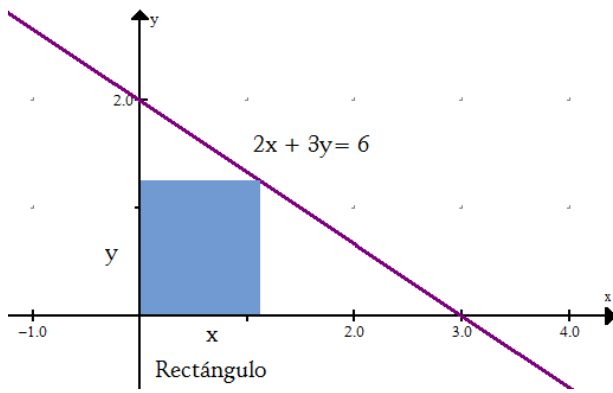
4.-Se van a utilizar 100 metros de tela de alambre para construir 6 jaulas de un zoológico como se muestra en la figura. Calcular las dimensiones para que el área que abarcan las jaulas sea máxima.



5.- Un granjero tiene 150m. de material para cercar un campo con forma rectangular y quiere usar un granero como parte de uno de los lados del terreno. Si el granero mide 10m de largo. Determine las medidas x , y que den el área máxima.
Sol. $x=35m$.



6.-Encuentre las dimensiones de la región sombreada, de forma que su área sea máxima.



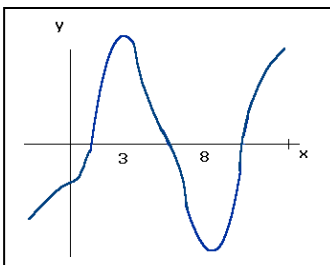
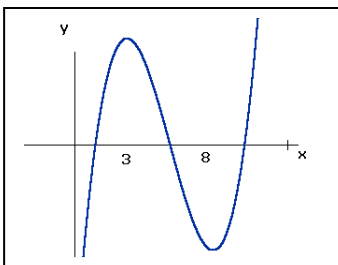
CAPÍTULO 14 CONCAVIDAD

Supongamos que tenemos la siguiente información, referente a una curva derivable:

Intervalo	Signo de f'	F
$(-\infty, 3)$	+	Creciente
$(3, 8)$	-	Decreciente
$(8, +\infty)$	+	Creciente

¿Cómo la graficaríamos?

Podríamos tener dos soluciones, como se muestra en la figura:

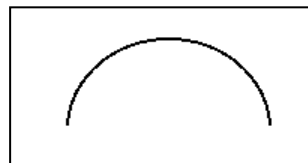
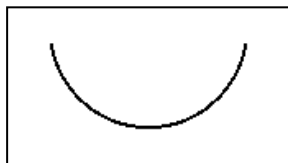


¿Cuál de las dos opciones es la correcta?

Para contestar esto veamos lo que entenderemos por concavidad.

Una gráfica como esta es cóncava hacia arriba

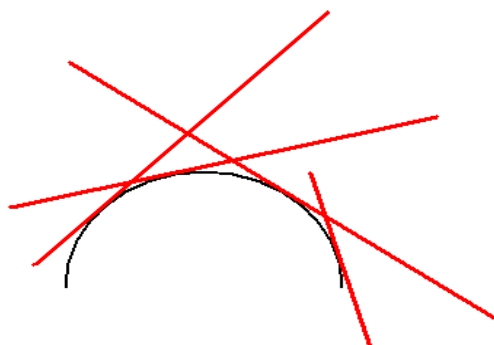
Una grafica como esta es cóncava hacia abajo



Tracemos las rectas tangentes a estas curvas. ¿Qué relación hay entre las graficas y las rectas tangentes?



La gráfica queda por arriba de las rectas tangents



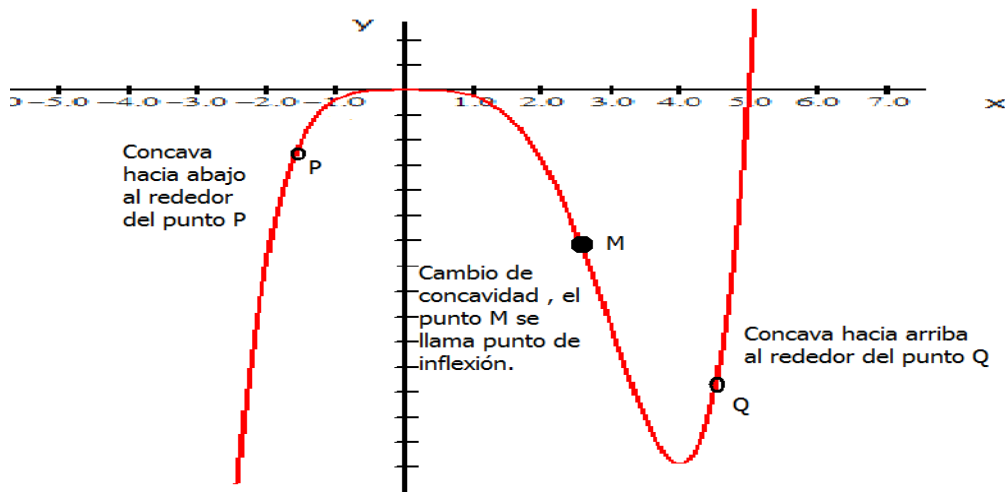
La gráfica queda por debajo de las rectas tangentes

Veamos las siguientes definiciones

CONCAVIDAD HACIA ARRIBA: La gráfica de una función se dice que es cóncava hacia arriba alrededor de un punto, si la gráfica queda por arriba de las rectas tangentes, alrededor de dicho punto.

CONCAVIDAD HACIA ABAJO: La gráfica de una función se dice que es cóncava hacia abajo alrededor de un punto, si la gráfica queda por abajo de las rectas tangentes, alrededor de dicho punto. En este caso también se puede decir que la curva es convexa.

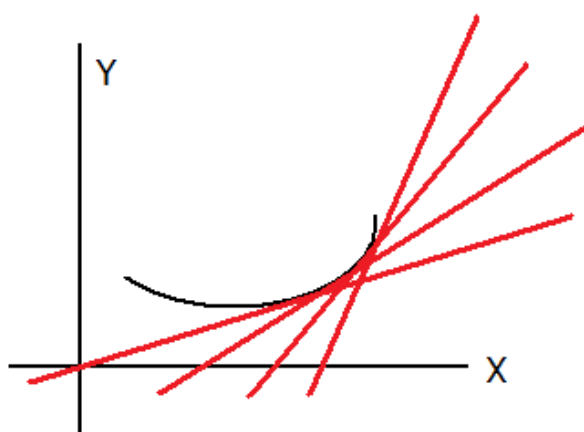
Veamos la siguiente gráfica, en donde se analizan estos conceptos.



¿Cómo podemos utilizar la derivada para saber si una curva es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?

Veamos:

¿Qué pasa con las pendientes de las rectas tangentes, en una curva cóncava hacia arriba?



Respuesta: las pendientes van creciendo, son crecientes

¿Cómo están relacionadas la pendiente y la función?

Respuesta: Por la derivada $m=f'$

¿Cómo sabemos cuando una función es creciente?

Respuesta: La función es creciente cuando la derivada es positiva

¿En este caso como lo aplicamos?

Respuesta: Como queremos saber en donde la pendiente es creciente tenemos que derivar m ; pero $m=f'$, o sea que debemos ver en donde la segunda es positiva $f''>0$.

Ejercicio

¿Cómo podemos utilizar la derivada para saber si una curva es cóncava hacia abajo?

¿Qué pasa con las pendientes de las rectas tangentes, en una curva cóncava hacia abajo?

¿Cómo están relacionadas la pendiente y la función?

Respuesta:

¿Cómo sabemos cuando una función es creciente?

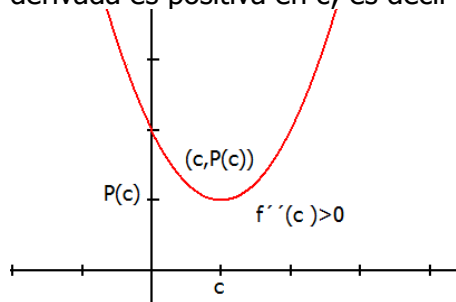
Respuesta:

¿En este caso como lo aplicamos?

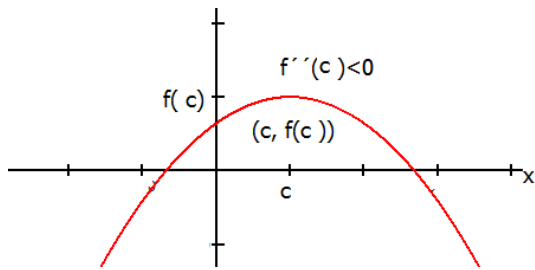
Respuesta:

PRUEBA DE CONCAVIDAD

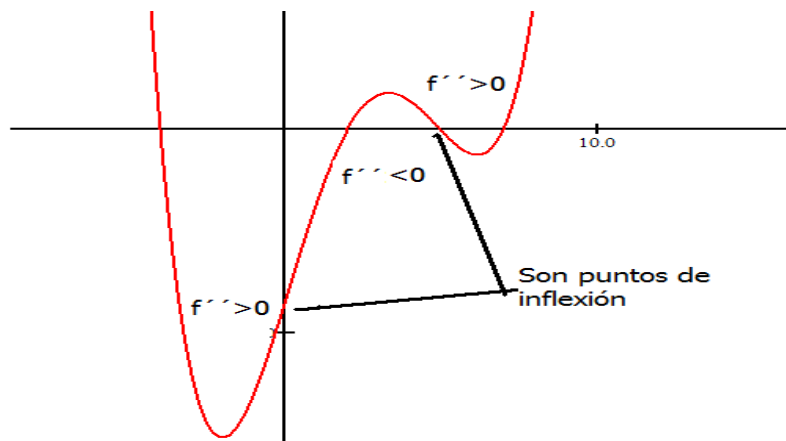
CONCAVA HACIA ARRIBA: Una función es cóncava hacia arriba en un punto $(c, f(c))$ si la segunda derivada es positiva en c ; es decir $f''(c)>0$.



CONCAVA HACIA ABAJO: Una función es cóncava hacia abajo en un punto $(c, f(c))$ si la segunda derivada es negativa; es decir $f''(c) < 0$.



PUNTO DE INFLEXION: Diremos que un punto de inflexión, es en el cual hay un cambio de concavidad. Para buscar un punto de inflexión de la función $f(x)$, determinar los puntos en donde la segunda derivada es igual a cero, es decir en donde $f''(c) = 0$. Pero no siempre que la segunda derivada es igual a cero existe un punto de inflexión, para verificarlo se debe ver si existe un cambio de signo en la segunda derivada.



EJEMPLO: Hallar los intervalos en donde la función $y = -x^4 + 2x^2 + 12$ es cóncava hacia arriba y en donde es cóncava hacia abajo.

Solución: hallemos la segunda derivada

La primer derivada es: $y' = -4x^3 + 4x$

Tenemos que la segunda derivada es: $y'' = -12x^2 + 4$

Igualando a cero la segunda derivada: $y'' = -12x^2 + 4 = 0$, así: $x^2 = -4/-12$

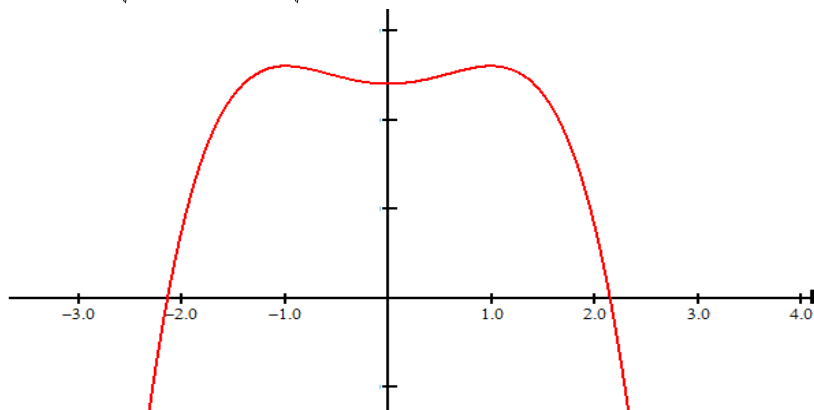
De esto tenemos: $x = \pm \sqrt{\frac{4}{12}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Formemos la siguiente tabla:

Intervalo	valor de prueba	derivada	signo de la derivada	función M
$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$	-1	$y''(-1) = -8$	-	cóncava hacia abajo
$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$	0	$y''(0) = 4$	+	cóncava hacia arriba

$(\frac{1}{\sqrt{3}}, 00)$ 1 $y''(1)=-8$ - cóncava hacia abajo

Así en $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, y en $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ hay puntos de inflexión.



Ejercicio

1) Hallar los intervalos en donde la función $y=x^4-8x^2$ es cóncava hacia arriba y en donde es cóncava hacia abajo.

2) Hallar los intervalos en donde la función $y=6x^5-5x^3$ es cóncava hacia arriba y en donde es cóncava hacia abajo.

- 3) Hallar los intervalos en donde la función $y=x^4-6x+2$ es cóncava hacia arriba y en donde es cóncava hacia abajo.



CAPÍTULO 15 CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA MÁXIMOS Y MÍNIMOS

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Sea c un número crítico de una función f en el cual $f'(c)=0$ y f' existe para todos los valores de x en un intervalo abierto que contiene a c .

Entonces: si $f''(c)$ existe y se tiene que:

1) $f''(c) > 0$, la función f tiene un mínimo en c .

2) $f''(c) < 0$, la función f tiene un máximo en c .

Ejemplo 1. Hallar los máximos y mínimos de la función, utilizando el criterio de la segunda derivada: $y=2x^3-9x^2+11$

Solución: *Obtengamos y' : $y'=6x^2-18x$

Busquemos los números críticos, para esto tomemos: $y'=0$

así: $y'=6x^2-18x=0$, factorizando: $6x(x-3)=0$

por lo que los números críticos son: $x=0$, $x=3$

**Calculemos la segunda derivada y veamos su signo:

$$y''=12x-18$$

Sustituyendo $x=0$: $y''(0)=12(0)-18=-18$ es negativa, así hay un máximo en $x=0$

Sustituyendo $x=3$: $y''(3)=12(3)-18=18$ es positiva, así hay un mínimo en $x=3$

Ejercicio

1. Calcular los máximos y mínimos de la función, empleando el criterio de la segunda derivada

$$y=x^3+3x^2-14$$

Ejemplo 2. Hallar los máximos y mínimos de la función, utilizando el criterio de la segunda derivada: $f(x)=10+2x^2-x^4$

Solución: (*) Obtengamos f' : $f'(x)=4x-4x^3$

Busquemos los números críticos, para esto tomemos: $f'(x)=0$

así: $f'(x)=4x-4x^3=0$, factorizando: $4x(1-x^2)=0$, aplicamos $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

tenemos: $4x(1-x)(1+x)=0$, por lo que los números críticos son: $x=0$, $x=1$, $x=-1$

(**) Calculemos la segunda derivada y veamos su signo:

$$f''(x)=4-12x^2$$

Sustituyendo $x=0$: $f''(0)=4-12(0)^2=4$ es positiva, así hay un mínimo en $x=0$

Sustituyendo $x=1$: $f''(1)=4-12(1)^2=-8$ es negativa, así hay un máximo en $x=1$

Sustituyendo $x=-1$: $f''(-1)=4-12(-1)^2=-8$ es negativa, así hay un máximo en $x=-1$

Ejemplo 3. Hallar los máximos y mínimos de la función, utilizando el criterio de la segunda derivada: $h(x)=x\sqrt{x+2}$

Solución: (*) Obtengamos h' : $h'(x)=x'\sqrt{x+2}+x\sqrt{x+2}'=\sqrt{x+2}+x\left(\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}\right)$

$$\text{Así: } h'(x)=\sqrt{x+2}+\frac{x}{2\sqrt{x+2}}=\frac{2(x+2)+x}{2\sqrt{x+2}}=\frac{3x+6}{2\sqrt{x+2}}$$

Busquemos los números críticos, para esto tomemos: $h'(x)=0$, también veamos donde h' no está definida:

Tomemos: $3x+6=0$, así: $x=-6/3 \Rightarrow x=-2$ y también $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

(**) Calculemos la segunda derivada y veamos su signo:

$$h''(x)=\frac{2\sqrt{x+2}(3x+6)'-(3x+6)(2\sqrt{x+2})'}{(2\sqrt{x+2})^2}=\frac{(2\sqrt{x+2})(3)-(3x+6)\left(2\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)}{4(x+2)}=\frac{6(x+2)-(3x+6)}{4(x+2)}$$

$$h''(x)=\frac{6(x+2)-(3x+6)}{4(x+2)}=\frac{3x-6}{4(x+2)^{3/2}}, \text{ así: } h''(x)=\frac{3x-6}{4(x+2)^{3/2}}$$

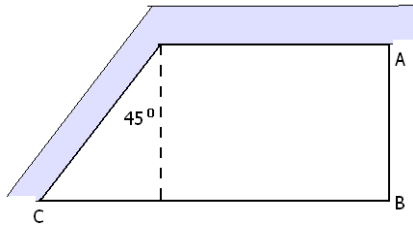
Sustituyendo $x=-2$: $h''(-2) = \frac{3(-2)+12}{4(-2+3)^{3/2}} = \frac{6}{4(\sqrt{1})^3} = \frac{6}{4}$ es positiva, así hay un mínimo en $x=-2$

Ejercicio

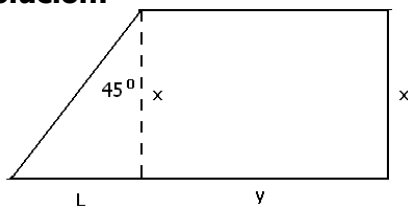
1) Hallar los máximos y mínimos de la función, utilizando el criterio de la segunda derivada:
 $f(x)=2x^3-9x^2-20$

2) Investigar los máximos y mínimos de la función: $f(x)=x^3-6x^2+9x-6$

Ejemplo. El RÍO: Un río tiene un codo de 45° , como se muestra en la figura, un granjero desea construir un corral bordeado por los dos lados del río y por los otros dos lados utiliza una milla de tela de alambre ABC. Hallar las dimensiones del corral de área máxima.



Solución:



Tenemos: $A = AR + AT \dots (A)$
 Donde: $AR = \text{Área del rectángulo} = yx$
 $AT = \text{Área del triángulo} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{Lx}{2}$
 Sustituyendo en (A): $A = yx + \frac{Lx}{2}$

De la figura tenemos:
 $\tan 45^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{L}{x}$
 Tenemos: $1 = \frac{L}{x}$
 Así $x = L \dots (*)$

Por otro lado: $L + y + x = 1$ milla, Sustituimos (*) $x = L$
 Tenemos: $x + y + x = 1$
 Así: $y = 1 - 2x \dots (**)$
 Sustituyendo en el área:
 $A = yx + \frac{x^2}{2} = (1 - 2x)x + \frac{x^2}{2} = x - \frac{3x^2}{2}$
 Así: $A = x - \frac{3x^2}{2}$

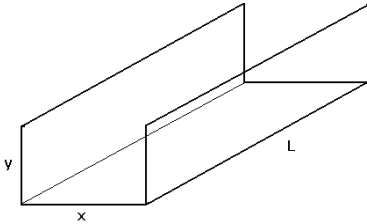
Apliquemos el criterio de la segunda derivada: $\frac{dA}{dx} = 1 - 3x$, igualando a cero: $\frac{dA}{dx} = 1 - 3x = 0$

De donde tenemos el número crítico: $x = \frac{1}{3}$, veamos que en este valor hay un máximo: $\frac{d^2A}{dx} = -3$

Así en $x = \frac{1}{3}$ hay un máximo, tenemos $x = 1/3$ milla, $L = 1/3$ milla, $y = 1/3$ milla.

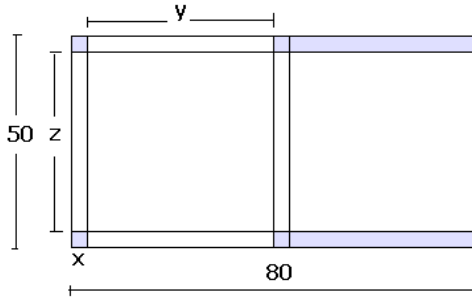
PROYECTO

- 1) Una canaleta de sección transversal rectangular se fabrica doblando porciones iguales en cada orilla de una pieza de hojalata de 30cm. De ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de la sección transversal que hacen que el volumen sea máximo?

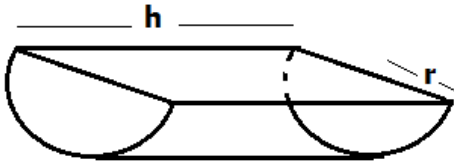


2) Una ventana tiene forma rectangular coronada por un semicírculo. Halle las dimensiones de la ventana que permita admitir el máximo de luz. Suponiendo que el perímetro debe ser de 5m.

3) Una caja con tapa debe hacerse de una hoja de cartón que mide 50cm por 80 cm. Esta se hace cortando las regiones sombreadas según la figura y después se doblan las líneas punteadas. ¿Cuáles son las dimensiones x , y , z que maximizan el volumen?
 Ventana tiene forma rectangular coronada por un semicírculo. Halle las dimensiones



4) Un recipiente metálico con extremos semicirculares debe tener una capacidad de 128π pies cúbicos. Determinar su radio r y su longitud h si se quiere que el recipiente tenga la menor cantidad de material en su construcción.

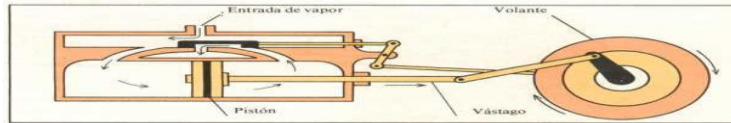


CAPÍTULO 16 DERIVADAS TRIGONOMETRICAS

Máquina de vapor

La máquina de vapor utiliza la energía térmica para realizar trabajo. Se hierva agua, con el fin de convertirla en vapor. Por mediación de un colector, el vapor acciona arriba y abajo una o varias piezas de metal llamadas pistones o émbolos. Los pistones están conectados a unas varillas metálicas llamadas vástagos, que se mueven al mismo ritmo que los pistones. El movimiento que se genera puede emplearse para hacer marchar un tren, o un generador eléctrico.

Ver también: Newcomen, Thomas; Savery, Thomas; Watt, James.



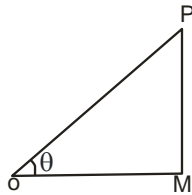
Máquina de vapor de Watt en una mina inglesa del siglo XVIII.

La Trigonometría es la ciencia que estudia las relaciones que ligan los lados y los ángulos de un triángulo y aplica dichas relaciones a obtener los elementos desconocidos de dicho triángulo.

En la antigüedad antes del año 100 a. C. los griegos inventaron la trigonometría para resolver problemas de astronomía, navegación y geografía. La palabra Trigonometría viene del griego y significa "medida de triángulo".

Funciones Trigonómicas

Las diferentes razones entre los lados de un triángulo rectángulo constituyen las funciones trigonométricas y se definen como sigue:



$$\frac{MP}{OP} = \text{seno del ángulo POM, puede escribirse como seno del ángulo } \theta \text{ igual a cateto opuesto sobre hipotenusa} \quad \text{sen } \theta = \frac{co}{hip}$$

$$\frac{OM}{OP} = \text{coseno del ángulo POM, puede escribirse como coseno del ángulo } \theta \text{ igual a cateto adyacente sobre hipotenusa} \quad \text{cos } \theta = \frac{ca}{hip}$$

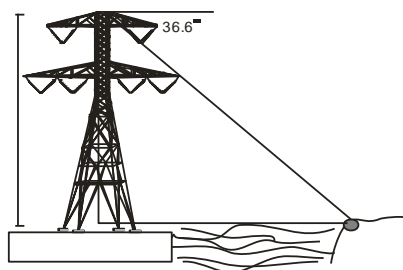
$$\frac{MP}{OM} = \text{tangente del ángulo POM, puede escribirse como tangente del ángulo } \theta \text{ igual a cateto opuesto sobre cateto adyacente} \quad \text{tan } \theta = \frac{co}{ca}$$

$$\frac{OM}{MP} = \text{cotangente del ángulo POM, puede escribirse como cotangente del ángulo } \theta \text{ igual a cateto adyacente sobre cateto opuesto} \quad \text{cot } \theta = \frac{ca}{co}$$

$$\frac{OP}{OM} = \text{secante del ángulo POM, puede escribirse como secante del ángulo } \theta \text{ igual a hipotenusa sobre cateto adyacente} \quad \text{sec } \theta = \frac{hip}{ca}$$

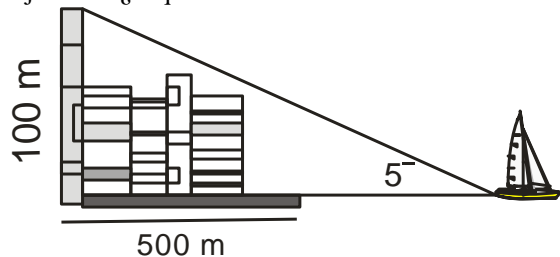
$$\frac{OP}{MP} = \text{cosecante del ángulo POM, puede escribirse como cosecante del ángulo } \theta \text{ igual a hipotenusa sobre cateto opuesto} \quad \text{cosec } \theta = \frac{hip}{co}$$

Ahora veamos algunas aplicaciones. Una torre de 135 pies de altura esta situada en la orilla de un lago. Desde la punta de la torre, el ángulo de depresión de un objeto en la orilla opuesta del lago es de 36.3° ¿Cuál es la anchura del lago?



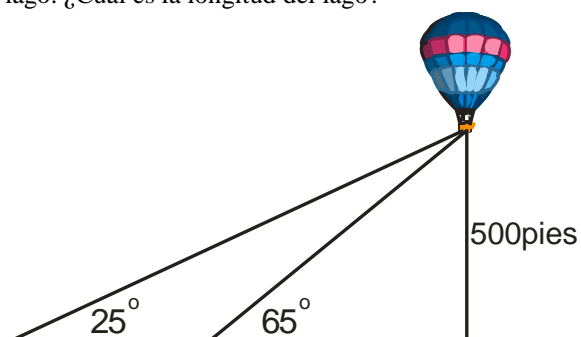
Apliquemos la tangente : $\tan 36.3^{\circ} = \frac{co}{ca} = \frac{135}{x}$, despejando x, tenemos
 $x = \frac{135}{\tan 36.6^{\circ}} = 178.7 \text{ pies}$

Ejercicio: ¿A que distancia de la costa se encuentra el bote?

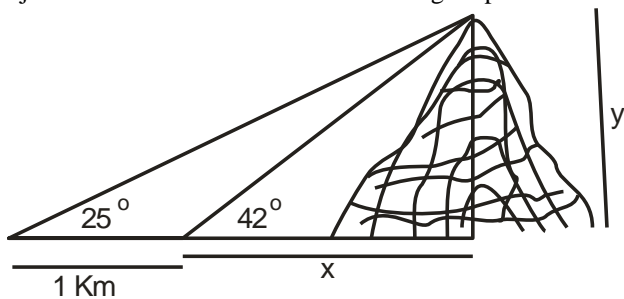


Ejercicio: Desde un globo estacionario de aire caliente, situado a 500 pies sobre el suelo, se tienen dos observaciones de un lago. ¿Cuál es la longitud del lago?

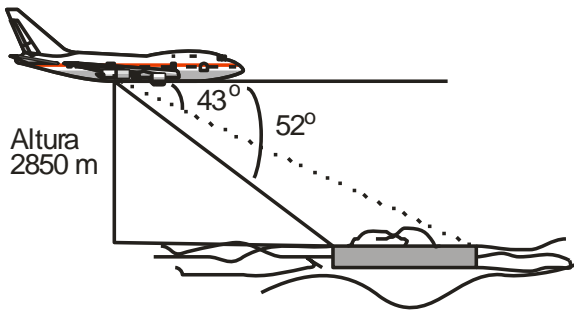
Resp839.1pies



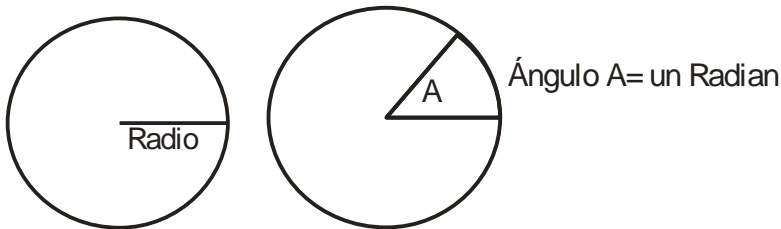
Ejercicio: Utilice la información de la figura para la altura de la montaña.



Ejercicio: Utilice la información de la figura y calcule la extensión x de la isla.



RADIANES. El radian es el ángulo que intercepta un arco igual al radio en longitud.



Tenemos la siguiente fórmula que relaciona los radianes y los grados

$$\frac{\text{Ángulo } A \text{ en radianes}}{2\pi} = \frac{\text{Ángulo } A \text{ en grados}}{360}$$

Por ejemplo transformar 30° a radianes

$$\text{Tenemos } 30^\circ = 30^\circ \left(\frac{2\pi \text{radianes}}{360^\circ} \right) = \frac{2\pi \text{radianes}}{12} = \frac{\pi \text{radianes}}{6} = \frac{\pi}{6}$$

Transforma: 12°, 18°, 120°, 90°, 330°, 710° a radianes

De ahora en adelante trabajaremos con radianes.

Derivadas de las funciones trigonométricas

La derivada de la función $y = \text{sen}x$

Primer paso: valor final

$$y_f = f(x + \Delta x) = \text{sen}(x + \Delta x)$$

Segundo paso: incremento de la función $\Delta y = y_f - y_i = f(x + \Delta x) - f(x) = \text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}(x)$

Apliquemos la identidad trigonométrica $\text{sen}A - \text{sen}B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \text{sen} \frac{A-B}{2}$

$$\text{Tenemos } \text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}x = 2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \text{sen} \frac{x + \Delta x - x}{2}$$

$$\text{Es decir } \text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}x = 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \text{sen} \frac{\Delta x}{2} = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \text{sen} \frac{\Delta x}{2}$$

$$\text{Tercer paso: cociente: } \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ tenemos: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \text{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\text{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\text{Cuarto paso: Aplicar el límite } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\text{Como } y = \text{cos}x \text{ es una función continua tenemos } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right) = \text{cos}x$$

Para hallar $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$ hacemos la sustitución $\frac{\Delta x}{2} = z$, entonces $\Delta x = 2z$, y tenemos, $z \rightarrow 0$ si $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{senz}}{2z} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{senz}}{z} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Así tenemos la derivada: $\frac{d \text{sen} x}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cos x \frac{1}{2} = \cos x$

En general tenemos:

$$\frac{d \text{senu}}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

La derivada de la función $y = \cos x$

Para esto podemos tomar $\cos x = \text{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$

$$\text{Así } \frac{d \cos x}{dx} = \frac{d \text{sen}(\pi/2 - x)}{dx} = \cos(\pi/2 - x) \frac{d(\pi/2 - x)}{dx} = \cos(\pi/2 - x)(-1) = -\text{sen} x$$

Pues tenemos:

$$\frac{d(\pi/2 - x)}{dx} = -1, \cos(\pi/2 - x) = \text{sen} x$$

$$\text{Así: } \frac{d \cos x}{dx} = -\text{sen} x$$

En general tenemos:

$$\frac{d \cos u}{dx} = -\text{senu} \frac{du}{dx}$$

Ejercicio: calcula la derivada de $y = \frac{\text{sen} x}{\cos x}$, utiliza la derivada del cociente

DERIVADAS TRIGONOMETRICAS

Continuando con la reglas para derivar funciones trigonométricas directas, en la siguiente tabla se muestran.

1. $\frac{d(\text{sen}u)}{dx} = \text{cos}u * \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d(\text{cos}u)}{dx} = -\text{sen}u \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d(\text{tan}u)}{dx} = \text{sec}^2 u \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d(\text{cot}u)}{dx} = -\text{csc}^2 u * \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d(\text{sec}u)}{dx} = \text{sec}u * \text{tan}u * \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d(\text{csc}u)}{dx} = -\text{csc}u * \text{cot}u * \frac{du}{dx}$

Ejemplos de derivadas trigonométricas :

1) Obtenga la derivada de la función: $y = 7\text{sen}6x$

Solución: $\frac{dy}{dx} = 7 \frac{d\text{sen}6x}{dx} = 7 \text{cos}6x \frac{d6x}{dx} = 7 \text{cos}6x(6) = 42 \text{cos}6x$

Aplicamos las fórmulas :

$$\frac{d c f}{dx} = c \frac{d f}{dx}$$

$$\frac{d \text{sen} u}{dx} = \text{cos} u \frac{d u}{dx}$$

2) Obtenga la derivada de la función: $y = 8\text{sen}2x + 5\text{cos}3x$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 8 \frac{d\text{sen}2x}{dx} + 5 \frac{d\text{cos}3x}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 7 \text{cos}2x \frac{d2x}{dx} + 5(-\text{sen}3x) \frac{d3x}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 7 \text{cos}2x(2) + 5(-\text{sen}3x)(3)$$

$$\frac{dy}{dx} = 14 \text{cos}2x - 15\text{sen}3x$$

Aplicamos las fórmulas :

$$\frac{d(f + g)}{dx} = \frac{d f}{dx} + \frac{d g}{dx}$$

$$\frac{d c f}{dx} = c \frac{d f}{dx}$$

$$\frac{d \text{sen} u}{dx} = \text{cos} u \frac{d u}{dx}$$

$$\frac{d \text{cos} u}{dx} = -\text{sen} u \frac{d u}{dx}$$

3) Hallar la derivada de la función: $y = \text{cos}10x^4 + 7$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \text{cos}10x^4}{dx} + \frac{d7}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\text{sen}10x^4 \frac{d10x^4}{dx} + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\text{sen}10x^4 \left(10 \frac{dx^4}{dx} \right) = -\text{sen}10x^4 (40x^3)$$

$$\frac{dy}{dx} = -40x^3 \text{sen}10x^4$$

Aplicamos las fórmulas:

$$\frac{d(f + g)}{dx} = \frac{d f}{dx} + \frac{d g}{dx}$$

$$\frac{d \text{cos} u}{dx} = -\text{sen} u \frac{d u}{dx}$$

$$\frac{dC}{dx} = 0$$

$$\frac{dv^n}{dx} = n v^{n-1} \frac{dv}{dx}$$

4) Hallar la derivada de la función: $y = 3\text{sen}(x^2 - 8x + 5)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d3\text{sen}(x^2 - 8x + 5)}{dx} = 3 \cos(x^2 - 8x + 5) \frac{d(x^2 - 8x + 5)}{dx}$$

Solución: $\frac{dy}{dx} = 3 \cos(9x^2 - 8x + 5)(2x - 8)$

$$\frac{dy}{dx} = 6(x - 4) \cos(9x^2 - 8x + 5)$$

Ejercicio

Obtenga la derivada de la función:

a) $y = 11\text{sen}3x$

b) $y = 9\text{sen}(4x-1)$

c) $y = \text{sen } x^2$

d) $y = 10\text{sen}6x^3$

e) $y = 23\text{cos}16x$

f) $y = 9\text{cos}(4x-1)$

g) $y = \text{sen}18x + 4\text{sen}17x + 9\text{cos}12x$

h) $y = 3\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

i) $y = 8\text{sen}\left(\frac{7x}{4}\right) - 5\text{cos}\left(\frac{2x}{5}\right)$

j) $y = 7\text{sen}(x-1) + 6\text{cos}(1-4x)$

k) $y = 15\text{cos}3x^4 - \text{cos}(8x+5) + 2\text{sen}7x + 9$

l) $y = 3\text{sec}2x + 5\text{sec}7x - 11\text{sec}2x$

m) $y = 9 \sec(8x-1) - \tan(3x+1) - \tan(x-4)$

n) $y = \tan 8x^4$

ñ) $w = 3 \tan 4z^6 + 6 \tan 3z^2 + 4 \tan 7x^5$

o) $y = \cot 3x - \cot 7x - 9 \cot x$

p) $v = \csc(4x-8)$

q) $v = \csc(1-z) + 7 \csc(1-5z)$

r) $y = x \sin 2x$

s) $y = 3x \cos 11x$

t) $y = 5x^3 \sin 7x$

u) $s = 2x \tan(3-4x)$

v) $y = \frac{\sin x}{x}$

w) $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

a) $y = x \operatorname{sen}(3x) - 3x + 5$

b) $y = 4x \cos(8w - 1)$

c) $y = x \tan(3x)$

d) $y = 9x^2 \tan(2x)$

Otros ejemplos de derivadas trigonométricas:

1) Obtenga la derivada de la función: $y = \operatorname{sen}^2 7x$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 2(\operatorname{sen} 7x)^{2-1} \frac{d\operatorname{sen} 7x}{dx} = 2(\operatorname{sen} 7x)^1 \cos 7x \frac{d7x}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(\operatorname{sen} 7x)^1 \cos 7x(7) = 14\operatorname{sen} 7x \cos 7x$$

Aplicamos las fórmulas:

$$\frac{d v^n}{dx} = n v^{n-1} \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d \operatorname{sen} u}{dx} = \cos u \frac{d u}{dx}$$

2) Obtenga la derivada de la función: $y = \tan^4 8x$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 4(\operatorname{Tan} 8x)^{4-1} \frac{d\operatorname{Tan} 8x}{dx} = 4(\operatorname{Tan} 8x)^3 \sec^2 8x \frac{d8x}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 32\operatorname{Tan}^3 8x \sec^2 8x$$

Aplicamos las fórmulas:

$$\frac{d v^n}{dx} = n v^{n-1} \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d \operatorname{Tan} u}{dx} = \sec^2 u \frac{d u}{dx}$$

3) Obtenga la derivada de la función: $y = \sqrt{3 \sec 5x + 12}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (3 \sec 5x + 12)^{\frac{1}{2}-1} \frac{d(3 \sec 5x + 12)}{dx} = \frac{1}{2} (3 \sec 5x + 12)^{-\frac{1}{2}} (15 \sec 5x \tan 5x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15 \sec 5x \tan 5x}{2\sqrt{3 \sec 5x + 12}}$$

Ejercicio

Obtenga las siguientes derivadas:

a) $y = (3 \cos x - 5)^2$

b) $T(x) = 12(4 - \operatorname{sen} 7x)^2 + 5$

c) $y = 5 \tan^4 9x$

d) $y = 8 \sec^3(2x - 9)$

e) $y = (1 + \cos 2x)^5$

f) $y = \sqrt{\operatorname{sen} 3x - 2}$

g) $y = \operatorname{sen}^4 17u + \operatorname{Tan}^3 12u$

Ejemplo: veamos un ejemplo en donde se utilice la fórmula del cociente.

Derivar: $y = \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\cos x - 2}$

Tenemos en su forma más simple, la fórmula de la derivada de un cociente es: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{uv' - vu'}{v^2}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\operatorname{sen} x + 1}{\cos x - 2}\right)' &= \frac{(\operatorname{sen} x + 1)(\cos x - 2)' - (\cos x - 2)(\operatorname{sen} x + 1)'}{(\cos x - 2)^2} \\ &= \frac{(\operatorname{sen} x + 1)(-\operatorname{sen} x) - (\cos x - 2)(\cos x)}{(\cos x - 2)^2} \\ &= \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - \cos^2 x - 2 \cos x}{(\cos x - 2)^2} \\ &= \frac{-(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) - \operatorname{sen} x - 2 \cos x}{(\cos x - 2)^2}, \text{ como } \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \text{ tenemos:} \\ y' &= \frac{-1 - \operatorname{sen} x - 2 \cos x}{(\cos x - 2)^2} \end{aligned}$$

Ejercicio

Obtenga las siguientes derivadas:

a) $y = \frac{\cos 5x}{\sen 5x}$

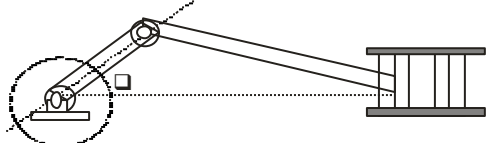
b) $y = \frac{1 + \sen x}{\cos x}$

c) $y = \frac{2 + \sec 4x}{\tan x}$

d) $y = \sqrt{2 - \tan^2 x}$

Ejercicio

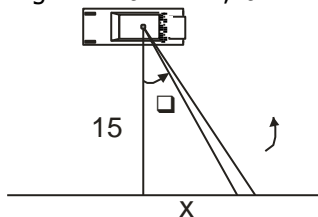
1.- **El pistón.** Un brazo de 10cm que conecta un pistón con una biela de 4cm de radio, la cual gira en sentido contrario a las manecillas del reloj a un ritmo de 200 revoluciones por minuto. Hallar la velocidad del pistón cuando $\theta = 45^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\theta = 70^\circ$, $\theta = 0^\circ$



Aplica la ley de cosenos para el triangulo



2.-**La patrulla.** Un coche de patrulla esta estacionada a 15m de un muro y su reflector gira a 30 revoluciones por minuto. ¿A qué velocidad en m/s se desplaza la luz sobre el muro cuando el rayo forma los siguientes ángulos? $\theta = 30^\circ$, $\theta = 45^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\theta = 70^\circ$



Máximos y Mínimos

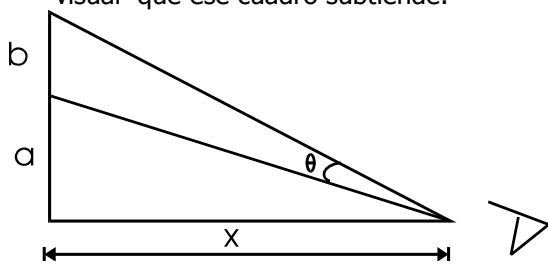
1. La altura de un proyectil lanzado con una velocidad inicial constante v_0 y de un ángulo de elevación θ_0 está dada por $y = (\tan \theta_0) x - (g / 2v_0^2 \cos^2 \theta_0)x^2$, en donde x es su desplazamiento. Demuestre que la altura máxima alcanzada por el proyectil es : $h = (v_0^2/2g)\text{sen}^2\theta_0$.

2. La temperatura media diaria (en grados Fahrenheit) de una ciudad viene dada por

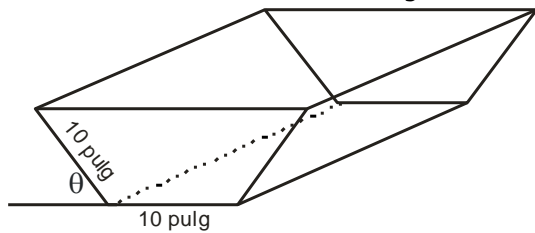
$T = 45 - 23\cos\left(\frac{2\pi(t-32)}{365}\right)$ Donde t se mide en días, con t=1 siendo el 1 de enero. Hallar la fecha esperada del día a) más caluroso, b) más frío

3. La iluminación E en cualquier punto P sobre el borde de una mesa circular, proporcionada por una lámpara colocada directamente arriba de su centro está dada por $E = (I \cos \theta) / r^2$. Dado que el radio de la mesa sea 1m e $Y=100$, encuentre la altura a la que debe colocarse la luz para que E sea máxima.

4. La base de un cuadro sobre la pared está a pies por encima del ojo de un observador. El lado vertical del cuadro mide b pies. A qué distancia de la pared ha de colocarse el observador para maximizar el ángulo visual que ese cuadro subtende.



5. Se desea fabricar un recipiente de forma que su sección transversal sea un trapecio isósceles con las dimensiones indicadas en la figura. Determine el valor de θ de manera que el volumen sea máximo.



CAPITULO 17 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Ejercicio. Dibuja la gráfica de la función $y=2^x$, para esto llena la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
y									

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. El secreto: Supongamos que una persona conoce un secreto y por alguna razón se lo platica a tres amigos y les pide que no se lo cuenten a nadie, pero estos por una extraña razón cada uno se lo platica a otros tres amigos y a continuación cada uno de estos otros se lo platica a otros tres amigos y así continúan hasta 10 veces. Al final de estos ciclos de diez. ¿Cuántos amigos conocen el secreto? Supongamos que en cada ciclo se tardan 5 minutos. ¿Cuánto tiempo se tardan en total para que todos conozcan el secreto? Obtenga una fórmula para calcular el número de personas en cada fase.

Dibuja la gráfica de la función $y=3^x$, podemos llenar la siguiente tabla:

Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
X									

Dibuja la gráfica de la función $y=\log_3 x$. para esto notemos que es equivalente a graficar $x=3^y$, podemos llenar la siguiente tabla:

Y	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
X									

EL NÚMERO e

El número e es importante y aparece en biología, química, física, matemáticas puras, etc. APARECE EN: LAS LEYES DE CRECIMIENTO

-Biología: Cuando se reproduce una bacteria y aumenta la población. Para la mosca de la fruta con población inicial de 33 y después de 4 días hay 300. $Y=33e^{0.5493t}$

-Economía: Cuando se invierte cierto capital y se cobre determinado interés, éste junto con el capital se vuelve a invertir y así se continua, (interés compuesto). Producción de madera que en cierta región está dada por $v=100000 e^{0.8\sqrt{t}}$, con $t=0$ a $t=1998$

- Medicina: En la estatura de una persona, por ejemplo el modelo de Jense (1937) que predice la altura en términos del tiempo $h= 79.04+ 6.39 t - e^{3.26-0.99t}$ (3 a 6 años)

LAS LEYES DE DECRECIMIENTO

-Química: Cuando se desintegra un elemento radiactivo, la cantidad de 10 gramos del isotopo del plutonio Pu239 y cantidad final 1 gramo $y=10e^{-0.000028454t}$.

- Medicina: Cuando se administra un medicamento a una persona, su organismo lo asimila a determinada rapidez.

Física: Cuando se enfría un cuerpo caliente que se expone a la temperatura ambiente (Ley de enfriamiento de Newton) con temperatura del medio de 60° y el cuerpo cambia de 100° a 90° en 10 minutos: $y=60+40e^{0.02877t}$.

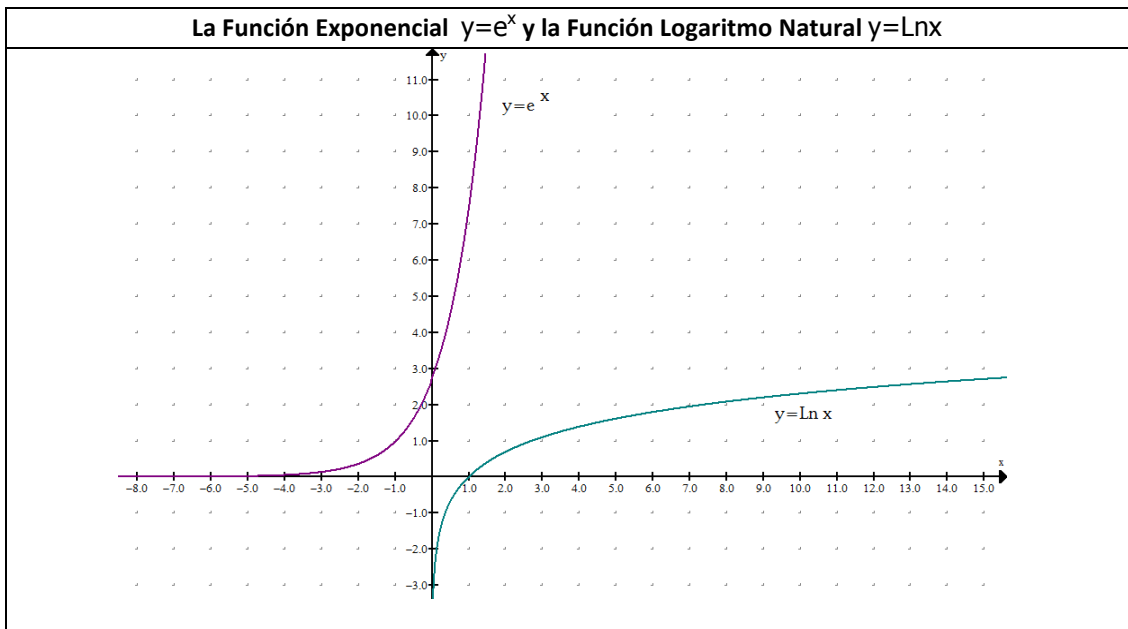
Analicemos la función $y= (1+x)^{1/x}$, cuando x tiende a cero, es decir tome valores muy cercanos a cero.

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$

N	10	100	1000	50000	100000
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$					

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718$, este límite se conoce como el número **e** y es la base de los logaritmos naturales

Tenemos la función exponencial $y=e^x$ y su función inversa logaritmo natural $y=\ln x$



Utiliza el programa winplot y obtén estas gráficas.

Algunos Límites importantes

Ejercicio: Utiliza la calculadora y calcula los siguientes límites

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n =$

N	10	100	1000	50000	100000
$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$					

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\text{sen}(\pi/4)}{n}\right)^n =$

N	10	100	1000	50000	100000
$\left(1 - \frac{\text{sen}(\pi/4)}{n}\right)^n$					

3) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{5^h - 1}{h}\right) =$

H	.1	.01	.001	.0001	0.00001
$\frac{5^h - 1}{h}$					

4) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2^h - 1}{h}\right) =$

H	.1	.01	.001	.0001	0.00001
$\frac{2^h - 1}{h}$					

5) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3^h - 1}{h}\right) =$

h	.1	.01	.001	.0001	0.00001

6) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) =$

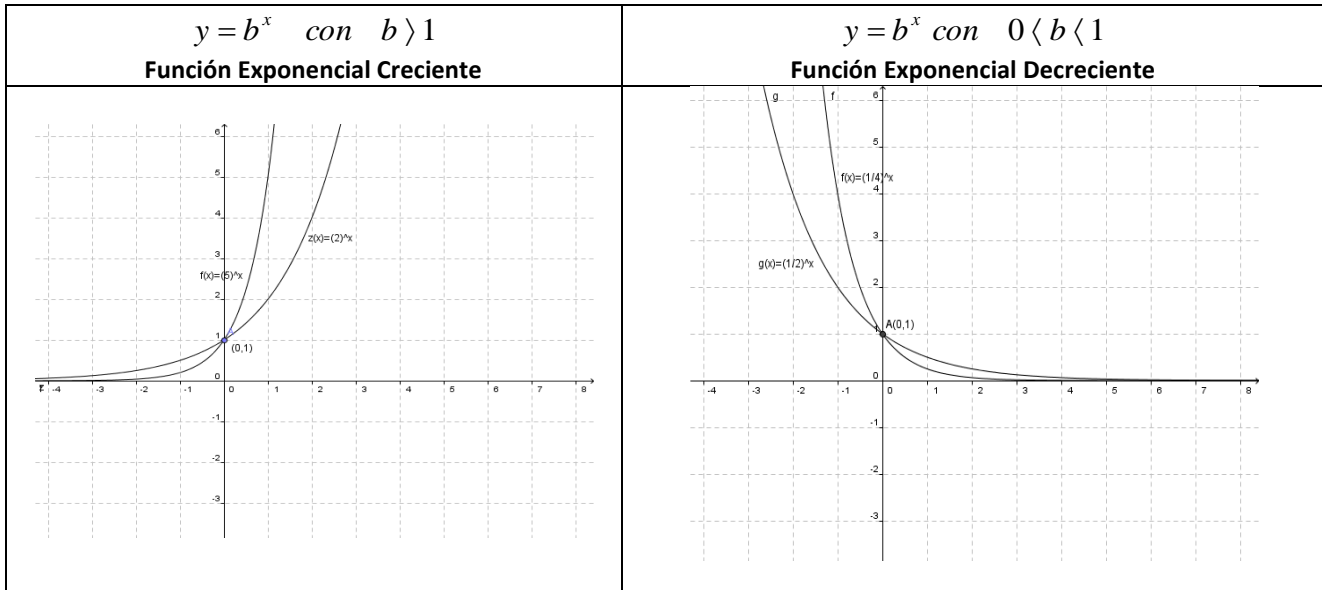
h	.1	.01	.001	.0001	0.00001

7) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e$

α	.1	.01	.001	.0001	0.00001
$(1 + \alpha)^\alpha$					

Funciones Exponenciales y logarítmicas

Funciones exponenciales: $y = b^x$, donde la variable ahora está como exponente.



DERIVADA DE LA FUNCION LOGARITMO NATURAL $y = \ln u$

Apliquemos los cuatro pasos como en el ejemplo anterior:

Primer paso: valor final, tenemos: $y_f = f(u + \Delta u) = \ln(u + \Delta u)$

Segundo paso: incremento de la función:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_f - y_i = f(u + \Delta u) - f(u) = \ln(u + \Delta u) - \ln(u) \\ &= \ln\left(\frac{u + \Delta u}{u}\right) \end{aligned}$$

Tercer paso: cociente: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta u} &= \frac{\ln\left(\frac{u + \Delta u}{u}\right)}{\Delta u} \\ &= \frac{1}{\Delta u} \ln\left(\frac{u + \Delta u}{u}\right) = \frac{1}{\Delta u} \frac{u}{u} \ln\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right) \\ &= \frac{1}{\Delta u} \frac{1}{u} \ln\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right) = \frac{1}{u} \ln\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{1}{\Delta u}} \end{aligned}$$

Cuarto paso: Aplicar el límite $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$

Así tenemos la derivada:
$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left(\frac{1}{u} \ln e\right) = \frac{1}{u}$$

De donde tenemos que la derivada de la función logaritmo natural $y = \ln u$, es: $\frac{d \ln u}{du} = \frac{1}{u}$

En forma general, tenemos: $\frac{d \ln u}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$

Ejemplo. Hallar la derivada de $y = \ln(5x+1)$

Apliquemos la fórmula: $\frac{d \ln u}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5x+1} \frac{d(5x+1)}{dx}, \text{ tenemos: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5x+1} (5)$$

$$\text{Así: } \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{5}{5x+1}}$$

Ejemplo. Hallar la derivada de $y = \ln(3x+8)^2$

Apliquemos la fórmula: $\frac{d \ln u}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(3x+8)^2} \frac{d(3x+8)^2}{dx}, \text{ tenemos: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(3x+8)^2} 2(3x+8)^{2-1} \frac{d(3x+8)}{dx}$$

$$\text{Así: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(3x+8)^2} 2(3x+8)(3) = \frac{2(3)}{(3x+8)} = \frac{6}{(3x+8)}$$

Ejemplo. Hallar la derivada de $y = \ln(\sqrt{3-x^2})$

Apliquemos la fórmula: $\frac{d \ln u}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} \frac{d(3-x^2)^{\frac{1}{2}}}{dx}, \text{ tenemos: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} \frac{1}{2} (3-x^2)^{\frac{1}{2}-1} \frac{d(3-x^2)}{dx}$$

$$\text{Así: } \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} (-2x) = \frac{-x}{3-x^2} = -\frac{x}{3-x^2}}$$

Ejercicios

Calcula las siguientes derivadas de las siguientes funciones y simplificar a su mínima expresión:

a) $y = \ln(4x-10)$

b) $y = \ln x^7$

c) $y = \ln 5x^3$

d) $y = (9-2x)$

e) $y = \ln(x^2-3)$

f) $y = \ln(x^3-x-4)$

g) $y = \ln(5w-2)^7$

h) $z = \ln \frac{6x}{4x+5}$

i) $z = \ln \frac{3-w}{7w+1}$

j) $y = \ln \sqrt{\frac{5+2s}{7+s}}$

DERIVADA DE LA FUNCION EXPONENCIAL $y=e^x$

Apliquemos los cuatro pasos como en el ejemplo anterior:

Primer paso: valor final, tenemos: $y_f = f(u + \Delta u) = e^{(u+\Delta u)}$

Segundo paso: incremento de la función:

$$\Delta y = y_f - y_i = f(u + \Delta u) - f(u) = e^{(u+\Delta u)} - e^{(u)}$$

Tercer paso: cociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{e^{u+\Delta u} - e^u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{e^u e^{\Delta u} - e^u}{\Delta u} = \frac{e^u (e^{\Delta u} - 1)}{\Delta u}$$

Cuarto paso: Aplicar el límite

Así tenemos la derivada:

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left(\frac{e^u (e^{\Delta u} - 1)}{\Delta u} \right) = e^u \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\Delta u} - 1}{\Delta u} \right) = e^u$$

Pues tenemos $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) = 1$

En general tenemos que $\frac{de^u}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$

Ejercicio: obtenga la derivada de la función

a) $y = 2^x$

b) $y = 3^x$

Similarmenete tenemos la fórmula para $y = a^u$

$$\frac{de^u}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

En general se muestra a continuación de algunas otras reglas para derivar funciones logarítmicas y exponenciales.

Algunas reglas (fórmulas o teoremas) para derivar funciones logarítmicas y exponenciales se presentan a continuación

Funciones Logarítmicas	Funciones exponenciales
1. $\frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{du}{u} = \frac{1}{u} * \frac{du}{dx}$ (base $e = 2.718... $)	2. $\frac{d(e^v)}{dx} = e^v * \frac{dv}{dx}$
3. $\frac{d(\log v)}{dx} = \frac{\log e}{v} * \frac{dv}{dx}$ (Base 10)	4. $\frac{d(a^v)}{dx} = a^v * \ln a * \frac{dv}{dx}$
	5. $\frac{d(u^v)}{dx} = v * u^{v-1} * \frac{du}{dx} + \ln u * u^v * \frac{dv}{dx}$

Algunos ejemplos de estas reglas se dan a continuación en la tabla siguiente.

Función	Derivada	Ejemplos	
$y = \log v$	$y' = \frac{\log e}{v} * \frac{dv}{dx}$	$y = \log(2x - 1)$	$y' = \frac{\log e}{(2x - 1)} * 2 = \frac{2 \log e}{(2x - 1)}$
$y = e^v$	$y' = e^v * \frac{dv}{dx}$	$y = 3e^{(x^2 - 2)}$	$y' = 3[e^{(x^2 - 2)} * 2x] = 6x * e^{(x^2 - 2)}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^x$	$y' = e^x$

$y = a^v$	$y' = a^v * \ln a * \frac{dv}{dx}$	$y = 7^{3x+7}$	$y' = 7^{(3x+7)} * \ln 7 * 3$ $y' = 3[7^{(3x+7)} * \ln(7)]$
-----------	------------------------------------	----------------	--

Ejercicios

Calcula las siguientes derivadas en tu cuaderno utilizando las reglas y simplificar a su mínima expresión.

1. $y = e^{5x}$	2. $y = 7e^{2x-1}$	3. $y = \frac{9}{e^{3x}}$	4. $y = \left(\frac{3}{e^x}\right)^2$	5. $y = 2^{7x}$
6. $y = 3^{x-1}$	7. $y = xe^{3x}$	8. $y = \frac{4e^x + 2e^{5x}}{e^{3x}}$	9. $y = 5^{6x-9}$	10. $y = \ln \operatorname{sen} x$
11. $y = 2^{4x+21}$	12. $y = 5x^2e^{9x}$	13. $y = \ln \tan 6x$	14. $y = \ln \sqrt{\operatorname{sen} x}$	15. $y = \ln \frac{3 + \operatorname{sen} x}{3 - \operatorname{sen} x}$

--	--	--	--	--

PROYECTOS

1.-El isótopo de carbono ^{14}C tiene una vida media de 5760 años(Así, si hubiera N átomos de ^{14}C presentes en un cierto tiempo, 5760 años después habría $\frac{1}{2} N$.) Si hay 10 mg de ^{14}C al tiempo $t=0$, entonces la cantidad presente $f(t)$ después de t años está dada por:

$$f(t) = 10 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{5760}}$$

Determine la cantidad de ^{14}C presentes después de a)100 años. b)500años. c)1000años. d)10000años e)50000años.
f)Obtenga la gráfica de $f(t)$. g)Obtenga $f'(t)$.

2.-Un cierto tipo de bacteria duplica el tamaño de su población cada hora. El número N de bacteria presentes t horas después de que se empieza a observar cierta colonia está dada por la fórmula: $N = (100)2^t$. Determine el número de bacterias después de:

a)una hora. b)tres horas y media. C)un día. D)dibuje la grafica de N . e)Obtenga $N'(t)$

4.-**La ley de enfriamiento de Newton.** Un huevo duro a 98°C se pone a enfriar en un recipiente con agua a 18°C . Después de 5min, la temperatura del huevo es de 38°C . Suponiendo que el agua no se ha calentado de manera apreciable. El enfriamiento del huevo sigue la ley: $T=18+80e^{-0.28t}$. Donde T es la temperatura del huevo, t es el tiempo. Utiliza Geogebra o Winplot para obtener la gráfica de la esta función. Con base a esta gráfica obtén el tiempo que tarda en tener una temperatura de 45°C , 30°C , 20°C , 18°C .

Calcula con base a las fórmulas de derivadas la velocidad de enfriamiento. Obtén su gráfica en la computadora.

5. **La Radioactividad.** El radio decrece exponencialmente y tiene una vida media de aproximadamente 1600 años; es decir dada una cantidad, al cabo de 1600 años se habrá desintegrado la mitad de la cantidad original de la sustancia radioactiva. Supongamos que tenemos 50mg de radio puro y que la ley de desintegración es: $y= 50e^{-(\ln 2/1600) t}$. utiliza Winplot para obtener la gráfica de la esta función. Con base a esta gráfica obtén el tiempo que tarda en tener una cantidad de 44mg, 36mg, 20mg, 12mg, 4mg. Calcula con base a las fórmulas de derivadas la velocidad de desintegración radioactiva. Obtén su gráfica en la computadora.

Ejercicios

1.- Utiliza la computadora obtén la gráfica y en base a las fórmulas de derivadas encuentra la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \text{sen} x e^x$

b) $y = e^{\text{sen} x}$

c) $y = x e^{\text{sen} x}$

d) $y = e^x/x$

e) $y=5\cos x e^{2x}$

f) $y=x^2 e^{\cos x}$

g) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

h) $y=5 \operatorname{sen} x e^{4\cos x}$

2. Obtenga la gráfica de . También obtén la gráfica de la función inversa en caso de existir.

a) $y=\log_2 x$

b) $y=\log_2(x-6)$

$$c) y = \log_2 \left[\frac{1}{(x+1)^3} \right]$$

CAPITULO 18 **FUNCIONES INVERSAS TRIGONOMETRICAS****FORMULAS BASICAS**

$$a) \frac{d(\operatorname{arcsen} v)}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$b) \frac{d(\operatorname{arccos} v)}{dx} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$c) \frac{d(\operatorname{arctan} v)}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2}$$

$$d) \frac{d(\operatorname{arccot} v)}{dx} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2}$$

$$e) \frac{d(\operatorname{arcsec} v)}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}}$$

$$f) \frac{d(\operatorname{arccsc} v)}{dx} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}}$$

OBTENER LA DERIVADA DE LA FUNCION:

- A) $Y = \operatorname{arctan}(8x)$
- B) $Y = \operatorname{arctan}(3x-2)$
- C) $Y = 5\operatorname{arcsen} 20x$
- D) $Y = \operatorname{arcsen}(3+x^2)$
- E) $Y = \operatorname{arccos}(x^3)$
- F) $Y = \operatorname{arccot}(9x+2)$
- G) $Y = \operatorname{arccot}(7-3x)$
- H) $Y = \operatorname{arcsec}(22x)$
- I) $Y = \operatorname{arccsc}(8x)$
- J) $y = \operatorname{arctan}\left(\frac{x+1}{3}\right)$
- K) $y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2x+4}{6}\right)$

Máximos y mínimos

1.-Un fotógrafo va a tomar una fotografía de una pintura que tiene 4pies de altura y que se encuentra en una galería de arte. El lente de la cámara se encuentra a un pie más abajo que el canto inferior del cuadro. ¿A qué distancia del cuadro debe encontrarse la cámara para maximizar el ángulo subtendido por el lente de la cámara? Resp.2.23pies ángulo=41.81°

